В. АРЕНС

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО
Б. Д. КАМИНСКОГО
С ПРЕДИСЛОВИЕМ
Я. И. ПЕРЕЛЬМАНА

С 74 РИСУНКАМИ.

КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО „ПЕТРОГРАД"
ЛЕНИНГРАД — МОСКВА
1924

ТИПОГРАФИЯ
Ленинградского Губернского Отдела Труда
Моховая, 8.



Ленинградский гублит 8154. Тираж 4000 экз.

## Предисловие к русскому изданию.

Автор этой книги, д-р Аренс, приобрел в Германии заслуженную известность своими исследованиями в области математических игр; ему принадлежит обширный двухтомный труд „Математические развлечения и игры“, в котором область эта разработана с исчерпывающею полнотой и строгой научностью *). Предлагаемая книжечка под сходным заглавием, принадлежа перу выдающегося знатока предмета, не имеет, однако, целью строго математическую разработку рассматриваемых ею вопросов. Ее задача—дать читателю приятное, занимательное чтение из области математических игр; соответственно этому, теория игр разбирается в ней по возможности общедоступно, без углубления в область отвлеченных обоснований.

Настоящий перевод, весьма тщательно и продуманно выполненный Б. Д. Каминским, сделан с 4-го немецкого издания, значительно переработанного по сравнению с предшествовавшими. Переработка подлинника состояла в исключении из книги тех глав и мест, чтение которых могло бы затруд-

*) Тому же автору принадлежат, сверх того, следующие более мелкие сочинения (на русский язык, как и упомянутое, пока не переведенные): „Старое и новое из области занимательной математики“ (1918), „Забава и дело в математике“ (1919) и „Анекдоты о математиках“.

нять читателя-нематематика *), в соответствующем изменении общего характера изложения, в пополнении текста новым, более живым материалом и в значительном увеличении числа иллюстраций (до 78). Особенно занимательно и свежо написана отсутствовавшая в прежних изданиях глава о математических софизмах, весьма поучительная для читателей с первоначальной подготовкой из алгебры и геометрии.

Во многих местах книги автором предлагаются легкие упражнения, с целью дать читателю возможность убедиться в правильном усвоении изложенного и помочь самостоятельно разобраться в новом вопросе. Задачи весьма несложны, и решение их не может затруднить внимательного читателя. В конце книги приведены ответы и необходимые указания.

При сравнительно небольшом объеме, этот томик, благодаря мастерскому изложению, вмещает довольно значительный материал, охватывая все то из области „классических“ математических игр, что может быть предложено широкому кругу читателей. В качестве приятного и поучительного чтения, изощряющего гибкость ума, приучающего к сосредоточенной работе мысли ради систематических поисков решения и, следовательно, хорошо подготовляющего к более серьезным научным занятиям, настоящая книга германского математика принесет несомненную пользу нашей любознательной молодежи.

*Я. Перельман.*

*) Русский переводчик, со своей стороны, также удалил ряд длиннот в тексте и упростил изложение некоторых мест.





## Введение.

Под „игрой“ мы понимаем занятие, не преследующее определенной практической цели, но служащее для нашего удовольствия, развлечения, вообще — приятного препровождения времени; мы говорим об „игре“ детей, „игре“ музыканта, „игре“ в театре и т. д. Тому, что игра имеет большое образовательное значение, наше определение нисколько не противоречит; больше того: в известном смысле, даже науку называют иногда „игрой“.

Предлагаемая книга содержит одни лишь игры; причем предполагается, что читатель может играть и один. Правда, часть из них, при практическом осуществлении, требует участия, по крайней мере, еще одного лица, так что некоторые игры приобретают характер состязания, — но это вовсе не является обязательным.

Если сам играющий, приступая к играм, и не преследует определенной цели, то многие игры, в том числе и предлагаемые нами, в конце концов преследуют некоторую цель. Достижение этой цели в одних играх, главным образом, основанных на „счастьи“, зависит исключительно от случая, в других — от навыка и умственной деятельности. Во многих играх (биллиард) достигаемый результат зависит от всех указанных факторов, причем, в зависимости от обстоятельств, один из них получает преобладание над другим.

„Математической" игрой называют такую, которая в своем процессе требует умственной деятельности и применения методов и умозаключений, употребляемых в математике. Математический характер игры будет тем полнее, чем больше преобладают в ней математические рассуждения и правила. В математическом обосновании игры, как и в самой математике, технический язык, в виде знаков и формул, не является такой необходимой частью, без которой нельзя обойтись. Эти знаки и формулы созданы лишь для экономии мысли и потому безусловно необходимы человеческому уму для сложных вопросов, встречающихся в математических дисциплинах. Ограниченному человеческому уму часто бывает даже трудно проникнуть в скрытые истины той или иной дисциплины без помощи духовных костылей—формул и знаков. Более того: удачный выбор внешних знаков иногда является решающим для дальнейшего развития какой-либо математической дисциплины. Но для разбираемых в этой книге игр мы можем, без особенного ущерба, не пользоваться символическим языком математики; исключением является лишь последняя глава, занимающая в этой книге особое положение.

Сущность математической игры легче всего выясняется на примере. Возьмем игру „ним", описываемую нами в главе VI. Эта простая игра имеет и сравнительно простую теорию, которую можно изложить, не пользуясь математическими символами, хотя теория эта носит чисто математический характер. Эта же теория показывает, что существует способ, наверняка ведущий к выигрышу; причем начинающий игру первым же ходом может обеспечить за собой победу. Знание одним игроком этой теории дает ему такое превосходство перед своим, хотя бы опытным противником, какое имеет европейское войско, вооруженное по последнему слову



техники, по сравнению с толпой дикарей, вооруженной луками и стрелами. Если оба игрока знают математическую теорию игры и безошибочно играют, то исход игры зависит лишь от начального положения, и тем самым она приобретает уже характер игры на „счастье"; самый же процесс в данном случае для них совершенно не интересен, потому что по начальному положению они могут заранее определить, кто из них выиграет. В качестве игры, „ним" может прельщать нас лишь до тех пор, пока мы не знаем ее математической теории; но интерес, который она вызывает, заключается именно в ее остроумной математической теории.

Следует заметить, что с математической точки зрения наибольший интерес представляют задачи сравнительно несложные. Для сложных игр, среди которых, по своему образовательному значению, первое место занимает шахматная игра, трудно, да едва ли и возможно, найти исчерпывающую теорию, охватывающую все частные случаи,—теорию, которая для каждой мыслимой позиции дала бы возможность найти абсолютно лучший ход и выиграть начинающему или, еще лучше, при безошибочной игре обоих игроков, сыграть в ничью. Неоднократные попытки применить математику к изучению шахматной игры, не увенчались успехом, да вряд ли это и возможно, поскольку в понятие „теория" мы вкладываем данное выше определение. В самом деле: что следует, вообще, понимать под „математическим" обоснованием шахматной игры? Математическая теория шахматной игры должна была бы отличаться от обычной тем, что, при данном расположении шахмат, в круг ее рассмотрения должны были включаться *все* ходы, возможные при этом положении; но это выходит за пределы осуществимого. Достаточно, например, указать, что число всех возможных положений после первых двух ходов, сделанных обеими сторонами, превосходит 70.000; в это число входят, конечно, как правильные, так и относительно неправильные комбинации. Поэтому, понятно, что нам кажется невозможным (хотя бы в этом случае) достигнуть исчерпывающего решения или какого-либо значительного упрощения, посредством математических методов. Если же простые и очевидные ходы шахматных фигур, шах и т. д., заменить сложными формулами и действиями над ними, то, пожалуй, окажется прав Шопенгауэр, сказавший, что математик подобен здоровому человеку, отрубившему себе ноги и заменившему их деревянными— фразу, объясняемую враждебностью Шопенгауэра к математике и непониманием ее. Вполне исчерпывающее рассмотрение всех возможных комбинаций для искусного шахматного игрока было бы бесцельной тратой времени и сил, тем более, что его опытный взгляд сразу отбрасывает ошибочные или не имеющие значения ходы и сосредоточивает все свое внимание на тех, которые кажутся ему наиболее целесообразными и могущими привести к более важным последствиям. Искусный шахматист подобен путешественнику, попавшему в незнакомый большой город, который, для ознакомления с ним, ограничивается осмотром главных улиц и наиболее выдающихся достопримечательностей; между тем, другой— решает не оставлять города до тех пор, пока он не ознакомится со всеми улицами и не осмотрит всех домов. При таком внимательном осмотре, он, может быть, увидит такие достопримечательности, которых первый не успел заметить, но часто будет попадать в тупые переулки и затратит много времени, а, может быть, застрянет в городе и навсегда. Таким образом, шахматная игра, несмотря на то, что в ней „случай“ и „проворство рук“ не играют роли, является игрой, правда, умственной, чисто логической, но вовсе не математической. Шахматная игра



потому и привлекает до сих пор внимание многих, что, несмотря на многолетнюю давность, она все же сохранила свою юношескую свежесть, благодаря бесчисленному множеству комбинаций, которые не поддаются исчерпывающему обоснованию.

Примером игры на шахматной доске, имеющей законченную теорию, может служит игра, известная под названием „волк и овцы“. Для этой, несравненно более простой и значительно менее интересной игры можно разобрать все случаи, которые могут представиться; причем игрок, который ведет фигуры, обозначающие овец, должен непременно выиграть. Доказательство состоит в составлении списка, исчерпывающего все случаи, и в расположении их в известном порядке, так что для каждого из них можно сразу указать правильные ходы. С математической точки зрения, игра эта, впрочем, не представляет интереса, так как здесь не приходится применять чисто математические приемы; методы ее обоснования походят более на статистические чем на математические.

---

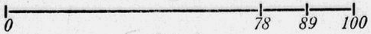
Глава I.

## Прыганье взапуски.

Начнем со следующей, весьма простой игры: Лицо *А* называет какое-нибудь число, не превышающее 10; его партнер *В* называет бо́льшее число, отличающееся от первого не менее, чем на 1, но не более, чем на 10. Затем *А* снова называет число, которое превышает второе не менее, чем на 1 и не более, чем на 10, и т. д. Выигравшим считается тот, кто первый назовет число 100. Всегда ли это возможно и, если возможно, то кто выигрывает и каким образом?

Нагляднее игру эту можно представить следующим образом. Два мальчика *А* и *В*, из которых каждый может прыгнуть на расстояние не свыше 10 футов, сговорились поочередными прыжками пройти путь в 100 футов, соблюдая следующие условия: каждый прыжок не может быть меньше одного фута; мальчик *А* начинает игру; *В* прыгает с того места, на которое прыгнул *А*; последний прыгает с того места, куда попал *В*, и т. д. Если приэтом пройденное в один прыжок расстояние, составляет дробное число футов, то вместо него, берется ближайшее меньшее целое число (напр., вместо $5^3/_4$ футов, берется 5 ф.). Выигравшим считается тот, кто первый достигнет конца пути.

После нескольких попыток, играющие заметят, что выигрывает всегда тот, кто первый очутится на 89-м футе (фиг. 1). Действительно, если, например, *А* достигнет 89-го фута, то расстояние, отделяющее его противника *В* от конечной цели, превосходит величину наибольшего прыжка (10 ф.) на




Фиг. 1.

1 фут. Поэтому *В* не может очередным прыжком достигнуть цели; с другой же стороны, по правилам игры, он обязан прыгнуть не меньше, чем на 1 фут. Он может попасть на 90-й, 91-й, 92-й или, в крайнем случае, на 99-й фут, но каждый раз *А* имеет возможность одним прыжком попасть на 100-й фут.

Но если достижение 89-го фута обеспечивает выигрыш, то на 89-й фут попадет, очевидно, тот, кто раньше достигнет 78-го. Таким же образом, на 78-й попадает достигший 67-го, и т. д. Получаем ряд чисел: 100, 89, 78, 67,... 34, 23, 12 и, наконец, 1. На эти-то числа, разделенные промежутком в 11, должен становиться желающий выиграть. Значит, выиграть возможно, и выигрывает тот, кто начинает игру. В первый прыжок он должен пройти 1 фут, в следующий—попасть на 12-й, затем на 23-й, 34-й... 78-й, 89-й и, наконец, на 100-й.

Очевидно, игра эта может быть видоизменена: можно, например, взять иную длину пути, или же иные численные значения для максимальных и минимальных прыжков. Числа, на которые должен становиться выигрывающий, отделены друг от друга промежутком, равным сумме чисел, выражающих максимальный и минимальный прыжок (в нашем случае $10 + 1 = 11$). Если длина пути случайно окажется кратным упомянутого промежутка, то выигрыш будет обеспечен уже не за первым (*А*), а за вторым (*Б*) игроком. Например, если длина пути равна 99 футам, а остальные условия прежние, то



как бы *А* ни начал, *Б* первым прыжком может попасть на 11, вторым на 22..., девятым на 99 и, следовательно, должен выиграть.

Вопрос 1-й: длина пути равна 200 футам; остальные условия прежние. *А* ошибочно расчитал, что для выигрыша он должен, как и прежде, попасть на 1; как должен Б продолжать игру, чтобы выиграть?

Вопрос 2-й: Кто выиграет, если максимальный прыжок для каждого определен в 8 футов, минимальный—в 1 фут, длина пути 90 футов, и как должен поступать выигрывающий?

Вопрос 3-й: Кто выиграет, если максимальный прыжок составляет 17 дециметров, минимальный 1 дециметр, а длина пути равна 15 метрам?

Вопрос 4-й: Кто выиграет, если максимальный прыжок составляет 10 футов, минимальный 3 фута и длина пути равна 182 футам?

Вопрос 5-й: Максимальный прыжок определен в 9 футов, минимальный в 2; длина пути равна 100 футам. Выигравшим считается тот, кто заставит противника достигнуть конца пути (100) или перепрыгнуть через этот конец *). Кто из играющих окажется выигравшим?

## Глава II.

# Игра в пятнадцать.

### § I. История и описание игры.

В восьмидесятых годах предыдущего столетия в Германии получила широкое распространение

*) В этом случае не делается различия между достижением цели и переходом за нее, между тем, как, например, в вопросе 4-м, различие это имеет существенное значение.

„игра в пятнадцать“. На рис. 2 изображен в уменьшенном виде экземпляр этой игры в ящике, в котором находится пятнадцать искусно приготовленных шашек.

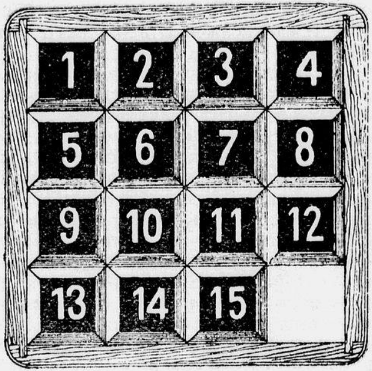



Рис. 2.

Впервые игра эта появилась в Америке в 1878 г. Говорят, ее остроумный изобретатель был известен в шахматном мире, как выдающийся составитель задач. Сразу же после появления, игра распространилась во всех цивилизованных странах английской культуры, под названием: „Fifteenth Puzzle“ (игры в 15), германской культуры—„Boss Puzzle“ (игры Босса) и у французов, под названием: „Jeu du taquin“ (такен).

В первый же год в нее играли с большим азартом; никакая игра до той поры не пользовалась



подобным успехом. Говорят, в Гамбурге даже у пассажиров дилижансов можно было видеть небольшие ящики с пятнадцатью шашками. Хозяева торговых контор приходили в отчаяние от увлечения служащих этой игрой и принуждены были вывесить аншлаги, с запрещением ее в рабочие часы. Устраивались турниры этой игры и т. п. Даже в зале рейхстага,—как рассказывает Зигмунт Гюнтер, выдающийся географ, математик и либеральный политик,—можно было видеть депутатов, которые, слушая речи, одновременно развлекались этой игрой.

Игра состоит в следующем: *пятнадцать квадратных шашек, занумерованных цифрами от 1 до 15, расположены в произвольном порядке в квадратной коробке. 16-е место ящичка остается свободным. Требуется последовательным передвиганием шашек на пустое место с мест смежных, расположить их в порядке, указанном на рис. 2.*

Как увидим дальше, во многих случаях невозможно достигнуть указанного, так-называемого „нормального“ расположения шашек; в таких случаях мы будем называть задачу „неразрешимой“. Возможность или невозможность решения зависит исключительно от первоначального расположения шашек. Как же узнать, по расположению шашек, разрешима или неразрешима задача и как, в первом случае, решить ее?

## § 2. Решение задачи.

Прежде чем ответить на эти вопросы, условимся различать „места“ или „клетки“ ящика, обозначая их номерами, соответствующими рис. 2 (от 1 до 16). Например, „место 4“ постоянно обозначает клетку, которую на рис. 2 (т.-е. при нормальном расположении шашек) занимает шашка с нумером 4, а

„место 16“—нижнюю клетку справа, которая на рис. 2 остается свободной. Далее, горизонтальные ряды клеток будем называть „строками“, а вертикальные — „столбцами“; будем различать первую, вторую, третью и четвертую строки, считая сверху вниз; столбцы также будем именовать: первый, второй, третий, четвертый,—считая слева направо.

Возьмем случайное расположение шашек и попытаемся, посредством передвиганий, получить их нормальное расположение (рис. 2). Будем поступать следующим образом: положим шашку 1 на место 1 (если только она случайно не находится уже там) и затем, не трогая шашки 1, поставим шашку 2 на место 2. Нетрудно убедиться, что этого легко достичь сравнительно небольшим числом ходов. Тогда, не трогая первой строки, можно передвинуть шашки 3 и 4 в клетки 3-го и 4-го столбцов,—если, конечно, шашки эти раньше не находились в них. Во всяком случае, мы должны допустить, что шашки 3 и 4 могут быть, так или иначе, передвинуты на места, находящиеся в последних двух столбцах, и что одновременно в этих столбцах может оказаться и свободное место. Если шашки 3 и 4 случайно не оказались на нужных местах, мы можем привести их туда исключительно путем передвижений внутри восьмиклеточного поля последних двух столбцов. Нет необходимости рассматривать эти ходы для всех возможных случаев,—достаточно остановиться на наиболее неблагоприятном, когда камень 3 находится на месте 4, а камень 4—на месте 3. Пусть наше восьмиклеточное поле двух последних столбцов имеет расположение, указанное на рис. 3.

При всех ходах шашек, при расположении, указанном на рис. 3, мы не будем трогать 6 и 14 шашек, так как в них нет необходимости; таким образом, мы ограничиваем себя шестью клетками,—



что не помешает нам достичь цели. Если бы мы пожелали ограничиться четырьмя верхними клетками, из которых одна свободна, мы не могли бы достичь цели (дальше мы еще к этому вернемся), т.-е. не могли бы привести шашки 3 и 4 на нормальные места. От расположения фигуры 3 легко перейти к фигуре 4, если все пять камней шестиклеточного поля—дважды, а камень пятый даже трижды передвинуть по направлению, обратному движению часовой стрелки.

| | |
|---|---|
| 4 | 3 |
| 12 | 8 |
| 5 | |
| 6 | 14 |

Фиг. 3.

| | |
|---|---|
| 8 | 5 |
| 3 | |
| 4 | 12 |
| 6 | 14 |

Фиг. 4.

| | |
|---|---|
| 8 | 5 |
| 4 | 3 |
| 12 | |
| 6 | 14 |

Фиг. 5.

| | |
|---|---|
| 4 | 8 |
| 12 | 5 |
| | 3 |
| 6 | 14 |

Фиг. 6.

| | |
|---|---|
| 4 | 8 |
| 3 | |
| 5 | 12 |
| 6 | 14 |

Фиг. 7.

Передвижением шашек, находящихся в 4-х средних клетках, легко перейти от фигуры 4 к фигуре 5. Теперь передвинем все пять шашек верхнего шестиклеточного поля по направлению движения часовой стрелки так, чтобы шашка 4 очутилась на месте 3. Получим фигуру 6, а, затем,—передвигая шашки внутри четырех средних клеток, — поставим шашку 3 на место 7 (рис. 7). Последнее расположение камней 3 и 4 (рис. 7) является типическим.

Итак, рассмотрев, этот, особенно неблагоприятный случай, мы видим, что расположение рис. 7 всегда достижимо; отсюда легко получить такое расположение, при котором шашка 4 займет место 4, и шашка 3—место 3. Следовательно, первая строчка ящичка приведена в нормальный порядок, и ее мы больше трогать не будем.

Существенным в этом приеме было то, что у нас было шестиклеточное поле с одной свободной клеткой, благодаря чему, мы имели возможность не только передвигать последовательно 5 шашек в этом поле, но и 3 шашки среднего четырехклеточного поля (внутри названного шестиклеточного) с одной свободной клеткой. Лишь сочетанием этих двух родов передвижений возможно было достичь существенных изменений в расположении камней. Если ограничиться исключительно четырехклеточным полем, то, после всех возможных ходов, картина по существу осталась бы прежняя.

Таким же путем можно привести в нормальный порядок и *вторую* строку; приэтом все ходы выполняются лишь в последних трех строках, шашки же первой строки остаются на месте, и достигнутый там нормальный порядок не нарушается. Прежде всего легко передвинуть шашки 5 и 6 на их нормальные места (на 5 и 6—рис. 2); затем в шестиклеточном поле 7, 8, 11, 12, 15, 16 (рис. 2) совершаются передвижения, подобные ходам, изображенным на рис. 3—7. Здесь мы можем применить рассуждения, примененные выше к рис. 3—7; правда, мы теперь имеем лишь шестиклеточное поле, но выше мы сами себя ограничили им и убедились, что этого вполне достаточно. Таким образом, указанным на рис. 3—7 способом, можно привести шашки 7 и 8 на нормальные места и тем достигнуть в верхних двух строках нормального расположения.

В последних двух строках прежде всего передвигают шашку 13 на место 9 и шашку 9 на место 10,—аналогично тому, как мы раньше передвинули 3 и 4—фиг. 7—и получили типическое расположение; но теперь придется оперировать в двух последних *строках*, в то время, как выше мы имели дело с двумя последними *столбцами*. Затем передвигают шашки 13 и 9 на их нормальные места. Теперь остается шестиклеточное поле с местами 10, 11, 12, 14, 15, 16; после передвижения, изложенным способом, шашек 10 и 14 на их нормальные места, у нас останется лишь четырехклеточное поле с шашками 11, 12, 15 и со свободной клеткой. Передвигая эти шашки, можно привести шашку 15 на ее нормальное место, и свободным останется место 16. Шашки 11 и 12 могут оказаться либо на их нормальных местах, либо шашка 12 на месте 11, а шашка 11 — на месте 12. В первом случае задача решена; во-втором — имеем расположение рис. 8.



| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 12 | 11 |
| 13 | 14 | 15 | |

Фиг. 8.

Итак, мы пришли к следующему выводу:

*Из случайного первоначального расположения камней можно прийти либо к нормальному, либо к расположению, указанному на рис. 8.*

На вопрос, возможно ли от первоначального расположения перейти, по желанию, и к нормальному, и к расположению рис. 8,— мы пока ответа не дадим, а ограничимся указанием, что *в каждом* случае одно из указанных расположений достижимо.

## § 3. Математическая теория игры.

Будем исходить из определенного первоначального расположения (рис. 9). Будем читать цифры этой фигуры в порядке, которого мы и раньше придерживались, т.-е. в каждой строке—слева направо, а строки — сверху вниз. Мы видим, что шашка 1 занимает свое нормальное место. Следующая же за ней шашка 4 находится, как будем говорить, „*до*“ двух шашек, которые при „нормальном“ расположении находились бы раньше нее—мы имеем в виду шашки 3 и 2. Будем говорить, что шашка 4 дает два „отступления“ относительно нормального порядка. Таким же образом шашка 7, стоящая *до* шашек—3, 5, 2, 6, имеет четыре отступления; шашка 13, стоящая *до* шашек 11, 10, 2, 12, 6, имеет пять отступлений, и т. д. Для всего ящика мы имеем, таким образом: $0+2+4+5+1+1+2+6+6+5+3+2+0+1=38$ отступлений относительно нормального порядка.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 7 | 9 |
| 3 | 5 | 8 | 14 |
| 15 | 13 | 11 | 10 |
| 2 | 12 | 6 | |

Фиг. 9.

Эта общая сумма отступлений дает возможность усмотреть, достижимо ли нормальное расположение рис. 2 или нет: именно, если общее число отступлений четное (в нашем случае 38), то возможно получить нормальное расположение камней — задача разрешима. Напротив, если общее число отступлений—число нечетное, то нормальное расположение не получается: задача неразрешима. Приэтом предполагается, что свободное место находится внизу направо, т.-е. в клетке 16. Вместо громоздкого выражения „отступление от нормального расположения“ будем в дальнейшем употреблять принятый в математике термин „инверсия“. Условие для возможности решения задачи, данное выше без доказательств, мы можем теперь выразить следующим образом:

*Необходимым и достаточным условием для того, чтобы от данного расположения камней со свободным местом 16 можно было перейти к нормальному (рис. 2), является то, чтобы общее число всех инверсий данного расположения было четным.*

Чтобы убедиться в верности сказанного, поставим вопрос: как изменяется общее число всех инверсий от передвижения одной шашки на свободное место? Ответ весьма прост, когда шашка



передвигается в горизонтальном направлении: число инверсий от такого передвижения не меняется. Что произойдет, когда шашка передвигается в вертикальном направлении? Такое передвижение обозначает, что шашка отодвигается назад или вперед на 3 места, в зависимости от того, переводят ли ее вверх или вниз. Пусть передвигаемая шашка имеет нумер $x$, а 3 шашки, через которые она как бы перепрыгивает—нумера *a*, *в*, *c*, (*a*, *в*, *c* и $x$—числа в пределах от единицы до 15). Тогда могут представиться такие случаи:

1) $x$—больше каждого из чисел *a*, *в*, *c*;

2) $x$—меньше каждого из чисел *a*, *в*, *c*;

3) $x$—больше двух чисел из *a*, *в*, *c* и меньше третьего;

4) $x$—больше одного из числа *a*, *в*, *c* и меньше двух остальных.

В первом случае, когда шашка $x$ становится раньше шашек *a*, *в*, *c*, число инверсий увеличивается на 3; когда же шашка $x$ становится впереди шашек *a*, *в*, *c*, отпадают три инверсии. Таким образом, в первом случае, от передвижения шашки $x$, число инверсий меняется: либо увеличивается на 3, либо уменьшается на 3.

Второй случай сходен с первым: здесь также общее число инверсий либо увеличивается, либо уменьшается на три.

В третьем случае, когда шашка $x$ становится раньше шашек *a*, *в*, *c*, число инверсий, во-первых, увеличивается на 2, так как $x$ оказывается раньше двух чисел, меньших его; во-вторых, оно уменьшается на 1, так как $x$ оказывается перед числом, большим его. В итоге общее число инверсий увеличивается на 1. Когда $x$ становится впереди шашек *a*, *в*, *c*, общее число инверсий уменьшается на 1. Итак, в третьем случае общее число инверсий изменяется на 1.

В четвертом случае число инверсий также изменяется на 1. Следовательно, от передвижения шашки в вертикальном направлении, число инверсий меняется или на 3, или на 1, т.-е. увеличивается или уменьшается на одно из этих чисел. Полученный результат выразим так:

*Горизонтальное передвижение камня не изменяет общего числа инверсий, вертикальное—изменяет его на нечетное число (на 1 или на 3).*

Предположим, что на свободном месте находится воображаемая шашка с нумером 16. В таком случае мы можем сказать, что каждый отдельный ход, т.-е. передвижение шашки на соседнее свободное место, равносильно замене воображаемой шашки 16 действительно передвигаемой шашкой. Если шашка 16, как было предположено, находится в клетке 16, то, чтобы к концу игры она оказалась на том же месте, необходимо, чтобы число таких замен было четное; в самом деле, каждый ход,—в горизонтальном или вертикальном направлении,—должен как бы уничтожиться другим ходом в противоположном направлени, лишь тогда шашка 16 вернется на свое прежнее место. *Число ходов, необходимое для перехода от одного расположения к другому с тою же самой свободной клеткой, должно быть четным; и, очевидно, число горизонтальных ходов, как и вертикальных, взятое само по себе, тоже должно быть четным.*

Подведем итоги. От первоначального расположения шашек со свободным местом 16 можно перейти к конечному расположению, с тем же свободным местом, путем четного числа горизонтальных и вертикальных ходов. Первые не меняют числа инверсий; вторые, напротив, меняют их *каждый раз* на нечетное число, так что в конечном счете—в виду того, что число вертикальных ходов четное,—общее число инверсий изменяется *на*



*четное* число. Первоначальное расположение шашек со свободной клеткой 16 можно привести и к любому другому, с тем же свободным местом, но лишь в том случае, когда общее количество инверсий одного отличается от общего количества другого на *четное* число. Этот переход безусловно невозможен, когда разность между числами инверсий *нечетное*. Общее же число инверсий нормального расположения (фигура 2) равно нулю. Число инверсий для расположения рис. 8 равно 1 (шашка 12 стоит впереди шашки 11). Отсюда, между прочим, следует, что расположение фиг. 8 не может быть приведено к нормальному и что, обратно, нормальное расположение не может быть приведено к расположению фиг. 8. Легко усмотреть, что всякое расположение может быть приведено к нормальному только в том случае, когда общая сумма инверсий—число *четное*. Последнее условие является *необходимым* для перехода к нормальному расположению; оно является и условием *достаточным*. В самом деле, из предыдущего следует, что всякое первоначальное расположение с четным числом инверсий *не* может быть приведено к расположению фиг. 8 (с нечетным числом инверсий). Выше же было показано, что каждое расположение приводится либо к нормальному (рис. 2), либо к расположению фиг. 8; поэтому данное расположение с четным числом инверсий *всегда* можно привести к нормальному виду. С другой стороны, расположения с нечетным числом инверсий всегда могут быть приведены к расположению фиг. 8; к нормальному же они приведены быть не могут; но одно из конечных расположений для них всегда достижимо. Во всех так называемых неразрешимых случаях расположение фиг. 8—и только оно одно—всегда возможно. Этим данное выше правило доказано в полном объеме, и вопрос, оставленный в конце § 2 открытым, получил ответ, а именно: никогда одно и то же расположение не может быть приведено, по желанию, и к нормальному, и к расположению рис. 8,—но лишь к одному из них.

Расположения, при которых задача становится неразрешимой, могут объяснить тот исключительный интерес, который „игра в пятнадцать“ вызвала при своем появлении. Игрок, которому более или менее легко давались „разрешимые“ случаи, не зная теории игры, думал, что и в других случаях, при настойчивости и усердии, он в конце концов решит задачу.

Вопрос 6. Разрешима ли задача, данная на фиг. 10?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 9 | 10 | 13 | 14 |
| 15 | 12 | 11 | |

Фиг. 10.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 8 | 7 | 6 | 5 |
| 12 | 11 | 10 | 9 |
| 15 | 14 | 13 | |

Фиг. 11.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 9 | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 14 | 15 |

Фиг. 12.

В качестве примера, разберем расположение шашек, получающееся из нормального, если в каждой строке расположить шашки в обратном порядке, оставив свободное место внизу направо (см. рис. 11). Сумма инверсий будет число нечетное (в каждой из верхних строк 6 инверсий в нижней—3); следовательно, расположение рис. 11 нельзя привести к нормальному, но можно привести к расположению рис. 8.

В рассмотренных до сих пор задачах предполагалось, что свободное место при нормальном расположении находится в клетке 16. Если дано



расположение с иным свободным местом, и мы желаем узнать, разрешима ли в данном случае задача, то, прежде всего, совершим передвижения таким образом, чтобы свободное место оказалось в клетке 16. Например, при расположении рис. 12, мы последовательно передвигаем шашки 1, 2, 3, 7, 11, 15, чтобы клетка 16 стала свободной. Это новое расположение имеет 9 инверсий, а потому не может быть приведено к нормальному виду, но лишь к расположению рис. 8.

Нетрудно понять, что, если какое-либо расположение приводится к другому, то и обратно, последнее может приведено к первому. В самом деле: каким образом первое расположение приводится ко второму? Путем ряда „ходов“, т.-е. посредством целого ряда замен воображаемой шашки 16 соседними шашками. Например, первое расположение может быть приведено ко второму тем, что шашка 16 последовательно заменяется шашками *a*, *в*, *c* . . . . *m*, *n*, *r*, *s*. Шашка 16, таким образом, находилась рядом с *a*, а затем с *b*, с *c* . . . , с шашкой *r* и с шашкой *s*. Поэтому, мы можем, исходя из второго расположения, вернуться к первому, перемещая шашки в обратном порядке, т.-е., шашку 16 заменить шашкой *s*, затем шашкой *r* и т. д., пока не придем к первоначальному расположению. Отсюда следует что, например, расположение фиг. 8 может быть приведено к расположению фиг. 11 или 12, потому что последние, мы видели, могут быть приведены к фиг. 8. Так как все расположения с нечетным числом инверсий можно перевести и расположение фиг. 8, а это последнее — в расположение фиг. 11 или 12, то всякое расположение с нечетным числом инверсий можно перевести в расположение двух последних фигур. Далее, из только что установленного принципа обратимости одного расположения в другое, следует, что любое расположение с четным числом инверсий может быть приведено в любое другое с четным же числом инверсий, и что сказанное относится и к расположениям с нечетным числом инверсий. Мы приходим таким образом к следующему:

*Все расположения со свободным местом в клетке 16, имеющие четное число инверсий, образуют группу такого рода, что любые два расположения этой группы могут быть переведены одно в другое; в частности, они могут приведены в нормальное расположение. Точно так же, все расположения со свободным местом в клетке 16, имеющие нечетное число инверсий, образуют вторую группу переводимых друг в друга расположений; в частности, все расположения этой группы могут быть переведены в расположение фиг. 11 или фиг. 12. Расположение одной группы не может быть переведено в расположение другой; в частности, расположения второй группы не могут быть приведены к нормальному виду.*

## Глава III.

# Солитер.

### § 1. Правила игры. Обозначения.

Рис. 13 представляет существенную часть этой игры: игральную доску с 33 отверстиями, в которые можно вставлять колышки (или шарики).

О происхождении этой игры нет достоверных сведений. Во всяком случае, она почтенного возраста, свидетельством чего служит упоминание ее в летописи, найденной в 1710 году в Лейпциге. Экземпляр игры был найден в одной из коллекций,



причем на крышке был изображен ее предполагаемый изобретатель—отшельник, погруженный в эту игру.

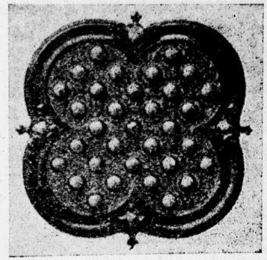


Рис. 13.

В Германии, из разнообразных форм этой игры, получила преобладание игра с 33 отверстиями (гнездами), из которых одно по крайней мере, в начале игры, остается свободным. Расположение отверстий указано на рис. 14.

Мы будем отличать отверстия друг от друга обозначениями, подобными обозначениям клеток шахматной доски; соответственно этому, будем изображать каждое отверстие квадратной клеткой, часто и называя его просто „клеткой“. Таким образом, каждому отверстию (рис. 15) соответствуют две цифры: первая показывает, в каком вертикальном

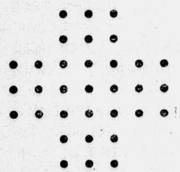


Рис. 14.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 37 | 47 | 57 | | |
| | | 36 | 46 | 56 | | |
| 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 | 75 |
| 14 | 24 | 34 | 44 | 54 | 64 | 74 |
| 13 | 23 | 33 | 43 | 53 | 63 | 73 |
| | | 32 | 42 | 52 | | |
| | | 31 | 41 | 51 | | |

Фиг. 15.

ряду или столбце оно находится (столбцы считаются слева направо); вторая показывает, в каком горизонтальном ряду или строке находится отверстие, причем строки считаются снизу вверх.

П р а в и л о  и г р ы. *Если из трех отверстий, находящихся в одном горизонтальном или вертикальном ряду, два соседних снабжены колышками, а третье, непосредственно примыкающее к одному из них, пустое, то колышек из отверстия, не прилегающего к пустому, переносится в пустое отверстие, а колышек примыкающего (среднего) вынимается и откладывается в сторону.*

Процесс вынимания и перенесения колышка из одной клетки в другую будем для краткости называть „ходом". Если отверстие 44 пустое, то возможен один из следующих ходов: $\frac{24}{44}, \frac{46}{44}, \frac{64}{44}, \frac{42}{44}$. Здесь каждый ход изображен в виде дроби: числитель показывает, из какого отверстия переносится колышек, знаменатель—куда этот колышек вставляется. В дальнейшем, мы будем все ходы обозначать такими дробями. У числителя и знаменателя подобной дроби должны быть одинаковы или первые, или вторые цифры; неодинаковые же разнятся на 2; цифра, заключенная между этими двумя неодинаковыми цифрами, и цифра, повторяющаяся в числителе и знаменателе, вместе изображают отверстие, из которого вынут колышек и отложен в сторону; в приведенных выше примерах, такими отверстиями являются: 34, 45, 54, 43.

Цель игры состоит в том, чтобы указанными выше ходами последовательно вынуть из 32 отверстий все колышки за исключением одного, причем вначале свободным отверстием может быть среднее (44) или какое-либо другое; отверстие же, в котором должен оказаться последний колышек, задается заранее.

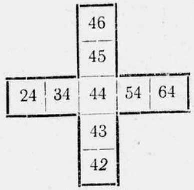


Само собою разумеется, что вначале могут быть заполнены и не все 32 отверстия, а только часть игральной доски; например, колышки могут образовать какую-либо фигуру, квадрат, крест и т. п., причем в остальном задача остается прежней, т. е. требуется удалить все имеющиееся на доске колышки за исключением одного.

## § 2. Задача с незаполненной доской.

Рассмотрим несколько задач, в которых только часть игральной доски занята и требуется удалить все находящиеся на доске колышки за исключением одного. Для каждого случая мы даем фигуры, образуемые колышками, придерживаясь введенного прежде обозначения клеток, занятых колышками; остальная часть доски может быть читателем восстановлена по рис. 15.

I. Крест из 9 колышков

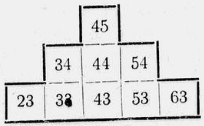



Фиг. 16.

Р е ш е н и е:

$\frac{43}{41}, \frac{45}{43}, \frac{24}{44}, \frac{44}{42}, \frac{64}{44}, \frac{41}{43}, \frac{43}{45}, \frac{46}{44}.$

II. Треугольник

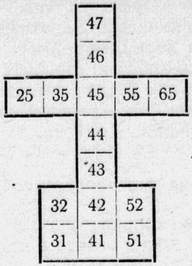



Фиг. 17.

Р е ш е н и е:

$\frac{53}{55}, \frac{55}{35}, \frac{33}{53}, \frac{63}{43}, \frac{44}{42}, \frac{35}{33}, \frac{33}{43}, \frac{42}{44}.$

III. Крест



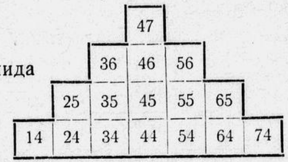

Фиг. 18.

Решение:

$\frac{31}{33}$, $\frac{51}{53}$, $\frac{43}{63}$, $\frac{41}{43}$, $\frac{33}{53}$, $\frac{63}{43}$.

Теперь получается фигура задачи I, лишь передвинутая на доске параллельно самой себе.

IV. Пирамида




Фиг. 19.

Решение:

$\frac{55}{53}$, $\frac{74}{54}$, $\frac{53}{55}$, $\frac{55}{57}$, $\frac{57}{37}$, $\frac{35}{33}$, $\frac{14}{34}$, $\frac{33}{35}$, $\frac{36}{56}$, $\frac{44}{46}$, $\frac{56}{36}$, $\frac{25}{45}$, $\frac{37}{35}$, $\frac{35}{55}$, $\frac{65}{45}$.

Само собою разумеется, что не все подобные задачи разрешимы; ограничимся простейшим примером такого рода, когда вначале заполнены колышками лишь 3 клетки, в положении, указанном на рис. 20. При первой же попытке решить эту задачу, читатель убедится, что, где бы ни была расположена фигура, ему удастся удалить только один колышек, и к концу игры останутся еще два.

Фиг. 20.



## § 3. Игра с заполненной доской.

Но обыкновенно, как было сказано в § 1,—все 32 колышка находятся на доске, причем любое произвольно выбранное отверстие остается свободным—будем называть его „начальным". Требуется последовательно удалить все колышки, за исключением одного; самое отверстие, в котором должен оказаться этот последний, указано заранее. Отверстие это будем называть „конечным". Чтобы понять решение этой задачи, называемой „основной", рассмотрим ряд ее частных случаев, отличающихся друг от друга „начальными" и „конечными" отверстиями. Возможно, что они покажутся читателю произвольно выхваченными из большого числа возможных случаев; но последующее (§ 4) покажет, что в нашем случае нет произвола; игры подобраны так, что ими исчерпываются все разрешимые случаи основной задачи.

I. Начальное отверстие—44; конечное—44.

$\frac{64}{44}$ $\frac{56}{54}$ $\frac{44}{64}$ $\frac{52}{54}$ $\frac{73}{53}$ $\frac{75}{73}$ $\frac{43}{63}$ $\frac{73}{53}$ $\frac{54}{52}$ $\frac{35}{55}$ $\frac{65}{45}$

$\frac{15}{35}$ $\frac{45}{25}$ $\frac{37}{35}$ $\frac{57}{37}$ $\frac{34}{36}$ $\frac{37}{35}$ $\frac{25}{45}$ $\frac{46}{44}$ $\frac{23}{43}$ $\frac{31}{33}$ $\frac{43}{23}$

$\frac{51}{31}$ $\frac{52}{32}$ $\frac{31}{33}$ $\frac{14}{34}$ $\frac{34}{32}$ $\frac{13}{33}$ $\frac{32}{34}$ $\frac{34}{54}$ $\frac{64}{44}$.

II. Начальное отверстие—44; конечное—74.

Ходы те же, что и в задаче I, но последний ход заменяется ходом $\frac{54}{74}$.

III. Начальное отверстие—74; конечное—74.

Первый ход задачи II заменяем ходом $\frac{54}{74}$.

IV. Начальное отверстие—74; конечное—47.

$$\frac{54}{74}\ \frac{52}{54}\ \frac{44}{64}\ \frac{73}{53}\ \frac{74}{54}\ \frac{54}{52}\ \frac{51}{53}\ \frac{31}{51}\ \frac{32}{52}\ \frac{43}{63}\ \frac{51}{53}$$

$$\frac{63}{43}\ \frac{34}{32}\ \frac{13}{33}\ \frac{15}{13}\ \frac{43}{23}\ \frac{13}{33}\ \frac{32}{34}\ \frac{56}{54}\ \frac{75}{55}\ \frac{54}{56}\ \frac{57}{55}$$

$$\frac{37}{57}\ \frac{36}{56}\ \frac{45}{65}\ \frac{57}{55}\ \frac{65}{45}\ \frac{24}{44}\ \frac{44}{46}\ \frac{25}{45}\ \frac{45}{47}.$$

V. Начальное отверстие—74; конечное—14. Первые 24 хода—как в задаче IV, а затем:

$$\frac{34}{36}\ \frac{55}{35}\ \frac{57}{55}\ \frac{25}{45}\ \frac{55}{35}\ \frac{36}{34}\ \frac{34}{14},$$

VI. Начальное отверстие—54; конечное—54.

$$\frac{56}{54}\ \frac{75}{55}\ \frac{54}{56}\ \frac{74}{54}\ \frac{53}{55}\ \frac{73}{53}\ \frac{43}{63}\ \frac{51}{53}\ \frac{63}{43}\ \frac{33}{53}\ \frac{41}{43}$$

$$\frac{53}{33}\ \frac{23}{43}\ \frac{31}{33}\ \frac{43}{23}\ \frac{13}{23}\ \frac{15}{13}\ \frac{25}{23}\ \frac{34}{32}\ \frac{13}{33}\ \frac{32}{34}\ \frac{45}{25}$$

$$\frac{37}{35}\ \frac{57}{37}\ \frac{34}{36}\ \frac{37}{35}\ \frac{25}{45}\ \frac{56}{36}\ \frac{44}{46}\ \frac{36}{56}\ \frac{56}{54}.$$

VII. Начальное отверстие—54; конечное—57.

Последний ход задачи VI заменяется ходом $\frac{55}{57}$.

VIII. Начальное отверстие—57; конечное—57.

Первый ход задачи VII заменяется ходом $\frac{55}{57}$.

IX. Начальное отверстие—54; конечное—24.

Первые 27 ходов задачи VI, затем: $\frac{56}{54}\ \frac{54}{34}\ \frac{46}{44}\ \frac{44}{24}$.



X. Начальное отверстие—57; конечное—24.

Первый ход задачи IX заменяется ходом $\frac{55}{57}$.

XI. Начальное отверстие—57; конечное—51. Первые шесть ходов, как в задаче X; следующие 24 хода получаются из последних 24 ходов задачи VI, зеркальным отражением относительно горизонтальной средней линии.

XII. Начальное отверстие—24; конечное—24.

$$\frac{44}{24}\ \frac{36}{34}\ \frac{15}{35}\ \frac{34}{36}\ \frac{37}{35}\ \frac{57}{37}\ \frac{56}{36}\ \frac{45}{25}\ \frac{37}{35}\ \frac{25}{45}\ \frac{32}{34}\ \frac{13}{33}\ \frac{34}{32}\ \frac{31}{33}\ \frac{51}{31}\ \frac{52}{32}$$

$$\frac{43}{23}\ \frac{31}{33}\ \frac{23}{43}\ \frac{54}{56}\ \frac{75}{55}\ \frac{73}{75}\ \frac{45}{65}\ \frac{75}{55}\ \frac{56}{54}\ \frac{64}{44}\ \frac{44}{42}\ \frac{63}{43}\ \frac{42}{44}\ \frac{14}{34}\ \frac{44}{24}.$$

XIII. Начальное отверстие—55; конечное—55.

$$\frac{53}{55}\ \frac{73}{53}\ \frac{75}{73}\ \frac{65}{63}\ \frac{52}{54}\ \frac{73}{53}\ \frac{54}{52}\ \frac{51}{53}\ \frac{31}{51}\ \frac{32}{52}\ \frac{43}{63}\ \frac{51}{53}\ \frac{63}{43}\ \frac{45}{65}\ \frac{57}{55}\ \frac{65}{45}$$

$$\frac{35}{55}\ \frac{47}{45}\ \frac{55}{35}\ \frac{25}{45}\ \frac{37}{35}\ \frac{45}{25}\ \frac{15}{35}\ \frac{13}{15}\ \frac{23}{25}\ \frac{34}{36}\ \frac{15}{35}\ \frac{36}{34}\ \frac{33}{53}\ \frac{34}{54}\ \frac{53}{55}.$$

XIV. Начальное отверстие—55; конечное—52.

Последний ход задачи XIII заменяется ходом $\frac{54}{52}$

XV. Начальное отверстие—52; конечное—52.

Первый ход задачи XIV заменяется ходом $\frac{54}{52}$.

XVI. Начальное отверстие—52; конечное—25.

Первые 28 ходов такие же, как в задаче XV; остальные: $\frac{43}{23}\ \frac{44}{24}\ \frac{23}{25}$.

2

Само собою разумеется, что для каждой разобранной задачи возможны и другие решения. Приведенные нами не имеют особых преимуществ. Предлагая их, мы имели в виду только интересы удобства; несомненно, что среди других решений имеются и более изящные.

Более ясными и наглядными являются следующие решения задачи I:

$$\frac{42}{44}\ \frac{63}{43}\ \frac{51}{53}\ \frac{43}{63}\ \frac{23}{43}\ \frac{44}{42}\ \frac{31}{33}\ \frac{41}{43}\ \frac{43}{23}\ \Big\|\ \frac{13}{33}\ \frac{34}{32}\ \frac{15}{13}$$

$$\frac{25}{23}\ \frac{13}{33}\ \frac{32}{34}\ \Big\|\ \frac{73}{53}\ \frac{54}{52}\ \frac{75}{73}\ \frac{65}{63}\ \frac{73}{53}\ \frac{52}{54}\ \Big\|\ \frac{45}{65}\ \frac{57}{55}$$

$$\frac{37}{57}\ \frac{54}{56}\ \frac{57}{55}\ \frac{65}{45}\ \frac{46}{44}\ \frac{44}{24}\ \frac{36}{34}\ \frac{24}{44},$$

(двумя вертикальными чертами отделены группы ходов, на которые естественно распадаются решения).

## § 4. Теория игры.

Мы дадим теорию игры без строгих математических доказательств, имея в виду лишь главнейшие выводы. Назовем „конгруэнтными" такие две клетки, от одной из которых можно перейти к другой путем одного или нескольких „перепрыгиваний" через две промежуточные, в горизонтальном и вертикальном направлениях. Например, клетки 15 и 45 (рис. 15) — конгруэнтны, так как от 15 легко перейти к 45, пропустив две находящиеся между ними клетки (25 и 35); клетки 45 и 42 конгруэнтны по той же причине; клетки же 42 и 15 конгруэнтны потому, что от первой можно перейти ко второй двукратным перепрыгиванием через две клетки (клетка 45 является в данном случае как бы мостом).



Далее будем считать, что каждая клетка конгруэнтна сама себе. *Математически можно доказать, что для игральной доски с 33 клетками, решение разобранной в предыдущем параграфе „основной" задачи возможно лишь тогда, когда начальное и конечное отверстие заданы так, что они конгруэнтны в указанном выше смысле.*

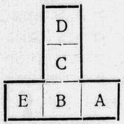
Только что указанное условие для возможности решения основной задачи, — именно конгруэнтность начального и конечного отверстий, — есть не только необходимое условие, но и достаточное (т. е., если это условие выполняется, основная задача всегда разрешима).

Шестнадцать примеров, приведенные в § 3, заключают решения всех возможных разрешимых случаев основной задачи. Это видно из следующего. Прежде всего заметим, что фиг. 14 при вращении на один или несколько прямых углов сама с собой совпадает. Далее, фиг. 14 симметрична относительно средней горизонтальной и средней вертикальной линий, так что половины, на которые эти линии делят фигуру, при наложении совпадают. Поэтому клетки, совпадающие при наложении и вращении, эквивалентны для нашей задачи, — в результате получаются следующие группы эквивалентных между собою клеток:

1) 13; 15; 37; 57; 75; 73; 51; 31.
2) 14; 47; 74; 41.
3) 25; 36; 56; 65; 63; 52; 32; 23.
4) 24; 46; 64; 42.
5) 35; 55; 53; 33.
6) 34; 45; 54; 43.
7) 44.

Задача II § 3 решена при начальном отверстии 44 и конечном — 74; поэтому легко получить решение задачи с начальным отверстием 44 и конечным 14, так как замена первой задачи второй, равносильна отражению относительно средней вертикальной линии (или наложению левой половины фиг. 14 на правую). Решение задачи с первоначальным отверстием 45 и конечным 75 прямо получается из задачи VII § 3 (начальное отверстие 54; конечное—57), так как замена второй задачи первой, соответствует вращению фиг. 14 на четверть окружности в направлении, обратном движению часовой стрелки, и последующему отражению относительно средней вертикальной линии.

Имея решение задачи с начальным отверстием *a* и конечным *в*, сразу же можно получить решение задачи с начальным отверстием *в* и конечным—*a*. Именно, если схему решения первой задачи перевернем, т.-е. напишем дроби в обратном порядке (с конца к началу), мы сразу получим решение второй задачи. Отказываясь от общего доказательства, можем убедиться в справедливости сказанного на примере доски, более простой, чем наша обычная (фиг. 21). Пусть *A*—начальное отверстие, а *E*—конечное; тогда решение основной задачи будет: $\frac{E}{A}, \frac{D}{B}, \frac{A}{E}$. Если напишем эти дроби в обратном порядке, получим:



Фиг. 21.

$\frac{A}{E}, \frac{D}{B}, \frac{E}{A}$ — решение следующего случая основной задачи: E—начальное отверстие и A—конечное. Две задачи, у которых начальное и конечное отверстия заменены одно другим, называются „сопряженными“.

Среди шестнадцати задач § 3 имеются 7 таких, у которых начальное отверстие является одновременно и конечным; причем каждое из этих 7 от-



верстий принадлежит к одной и только к одной из семи групп эквивалентных клеток (стр. 35), являясь как бы представителем определенной группы,—как видно из следующего сопоставления:

| № группы эквивалентных клеток. | Выбранная из группы клетка. | № соответствующей задачи. |
|---|---|---|
| 1 | 57 | VIII |
| 2 | 74 | III |
| 3 | 52 | XV |
| 4 | 24 | XII |
| 5 | 55 | XIII |
| 6 | 54 | VI |
| 7 | 44 | I |

Таким образом, исходя из решений § 3, можно сказать, что основная задача, при *одинаковых* начальных и конечных отверстиях, для всех 33 клеток может считаться исчерпанной. Остаются лишь те случаи, когда начальные и конечные отверстия *различны*; приэтом, повторяем, решения для таких задач существуют лишь тогда, когда указанные отверстия „конгруэнтны“ в объясненном выше смысле. Мы должны теперь рассмотреть всевозможные комбинации из двух различных, но друг другу конгруэнтных, клеток. Начнем со средней клетки доски, т.-е. с клетки 44, которая в нашем подразделении на группы, образует особую группу, именно седьмую (стр. 35). Легко усмотреть, что все клетки, конгруэнтные клетке 44, образуют группу 2 (стр. 35), и что клетки этой группы также между собой конгруэнтны и не имеют себе конгруэнтных в других 5-ти группах. Группы 2 и 7 образуют совокупность такого рода, что, если принять за начальное отверстие одну из клеток этой совокупности, то необходимо и за конечное отверстие взять клетку той же совокупности,— иначе основная задача не будет разрешима. Очевидно, внутри указанной совокупности возможны следующие отличные друг от друга случаи (при неодинаковых начальных и конечных отверстиях):

| Начальное отверстие. | Конечное отверстие. |
|---|---|
| 44 | 74 |
| 74 | 47 |
| 74 | 12 |

Решения этих задач даны в § 3 под обозначениями II, IV и V. Если к ним присоединить еще задачи I и III с одинаковыми начальными и конечными отверстиями (44 и 74—клетки совокупности), то мы исчерпаем все различные случаи, возможные внутри совокупности, образуемой из групп 2 и 7. Все решения других случаев внутри этой совокупности легко получаются из этих пяти решений, путем применения симметрии (вращения и наложения) и сопряженности (начальное отверстие заменяется конечным, а конечное—начальным).

Таким же образом и группы 1, 4 и 6 образуют совокупность; причем не все ее клетки друг другу конгруэнтны, но всякая клетка, конгруэнтная какой-либо ее клетке, обязательно входит в состав этой совокупности. Различные случаи, которые могут представиться внутри этой совокупности, исчерпываются задачами VI—XII параграфа 3. Наконец, группы 5 и 3 образуют третью совокупность, которая исчерпывается задачами XIII—XVII параграфа 3.



Вопрос 7. Найти решение следующего случая: начальное отверстие 14; конечное—41.

Вопрос 8. Найти решение следующего случая: начальное отверстие 52; конечное—55.

Вопрос 9. Найти решение следующего случая: начальное отверстие 46; конечное—13.

## Глава IV.

# Удвоения.

### § 1. Ряд степеней числа 2.

Древняя арабская легенда рассказывает об изобретателе шахматной игры следующее. Изобрел он эту прекрасную игру для развлечения индийского царя, который пришел от нее в такой восторг, что пожелал щедро вознаградить изобретателя. На вопрос царя изобретатель ответил: „Я желал бы, чтобы на первую клетку шахматной доски положено было одно пшеничное зерно, на вторую—2, и затем все время удваивали бы число зерен последующих клеток, пока не будет достигнута последняя клетка; все количество зерен, полученных таким образом, прошу отдать мне". Но выяснилось, что для удовлетворения этой просьбы, исполнить которую царь охотно согласился-было, не хватит хлеба не только в амбарах царя, но и во всей стране. Когда царю сообщили об этом, он сказал изобретателю: „Остроумие твоей просьбы еще более достойно удивления, чем талант, который ты выказал в изобретении игры".

Действительно, в шахматной доске 64 клетки ($8 \times 8$); понадобилось бы чудовищное двадцатизначное число, чтобы выразить общее количество зерен на всех 64 клетках. Число это:

18446744073709551615.

Его было бы достаточно, чтобы покрыть сплошь зернами всю земную поверхность слоем в сантиметр высотою. Числа при удвоении возрастают от клетки к клетке очень быстро и концу доски принимают неимоверно большие значения. Этим быстрым возрастанием чисел, при непрерывно продолжающемся их удвоении, остроумно воспользовалась некогда мюнхенская газета „Немецкая Трибуна". Не зная, как бороться с цензурными притеснениями, газета продолжала печатать вычеркнутые цензором статьи. Понятно, она была оштрафована, и так как продолжала все же печатать неразрешенные статьи, то денежный штраф с каждым днем удваивался. Наконец, „Трибуна" напечатала статью, в которой объявила, что министерство изыскало средство быстро погасить весь государственный долг: для этого достаточно лишь все время продолжать удваивать штрафы. Шутка эта вызвала всеобщий смех, и правительству пришлось отказаться от взыскания штрафа, достигшего к тому времени огромной суммы.

Но вернемся к задаче о пшеничных зернах шахматной доски. Напишем для каждой клетки (начиная с первой) число соответствующих ей зерен; получим ряд чисел, начинающийся так: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768 (мы привели числа лишь для первой четверти шахматной доски). Числа этого ряда, из которых каждое получается из предыдущего умножением его на 2 (напр. $8 \times 2 = 16$), называют „степенями" числа 2; число 2, есть „первая степень" 2; число 4 — вторая; число 8 — третья степень 2-х, и т. д. Записывают это так: $2^1 = 2$; $2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $2^4 = 16$; $2^5 = 32$, и т. д. По аналогии, первое число вышеприведенного ряда, именно 1, назовем „нулевой степенью" 2 и напишем $2^0 = 1$.

Впереди ряда степеней числа 2, т.-е. до числа 1, с которого начинается этот ряд, напишем еще одну



единицу; теперь ряд таков: 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32.... В этом новом ряду *каждое число равно сумме всех предшествующих чисел;* напр. $8 = 1 + 1 + 2 + 4$. Если это имеет место для начала ряда, наприм., до 8, то это будет справедливо и для всех следующих чисел, в чем читатель может убедиться при таком способе записи:

$$\underbrace{1,\ 1,\ 2,\ 4,}_{8}\ 8,\ 16\ldots$$

Нужно лишь принять во внимание, что за числом 8, по закону образования нашего ряда, идет $8 \times 2 = 16$, за 16 идет $16 \times 2 = 32$, и т. д. Если взятую нами на помощь единицу опустим, то сумма чисел, предшествующих 8, не будет равна этому числу, а равна 7, т.-е. числу 8, уменьшенному на единицу. Отсюда приходим к следующему выводу:

*В ряду степеней числа 2 каждое число на единицу больше суммы всех предшествующих чисел.*

Поэтому на 64-ю клетку шахматной доски пшеничных зерен придется одним больше, чем на все остальные 63 клетки, вместе взятые. Отсюда, — если бы мы пожелали вычислить общее число зерен, приходящихся на все 64 клетки, — мы вместо того, чтобы складывать все 64 числа нашего ряда, могли бы вычислить число зерен последней 64-й клетки. Уменьшенное на 1, число это сразу дало бы нам сумму зерен остальных 63 клеток.

## § 2. Особое применение ряда степеней числа 2.

Набор разновесок равноплечих весов обыкновенно содержит (на Западе) следующие гирьки:

1 г, 2 г, 2 г, 5 г, 10 г, 20 г, 20 г, 50 г;

по тому же принципу к ним часто присоединяются гири меньшего или большего веса. Имея набор разновесок, содержащий указанные 8 гирь, можно взвешивать все грузы от 1 до 110 граммов.

Решим теперь такую задачу:

*Как взвесить те же грузы при помощи возможно меньшего числа гирь и какими гирями придется для этого воспользоваться?*

Мы предполагаем здесь, что одна чашка весов предназначена исключительно для взвешиваемого груза, так что на нее гири не кладутся. Набор разновесок, по условию, должен взвешивать тела в 1 грамм, а, следовательно, в нем должна быть и гиря в 1 грамм *). Для взвешивания тела в 2 г необходимо иметь или еще одну гирю в 1 г или отдельно гирю в 2 г. Второе для нас выгоднее, так как, имея одну гирю в 1 г и другую в 2 г, можно взвесить не только груз в 1 и 2 г, но и груз в 3 г = 1 г + 2 г. Поэтому мы выбираем для искомого набора прежде всего две гири: в 1 г и в 2 г. Чтобы иметь возможность взвесить груз в 4 г, необходимо ввести или еще 1 г, или вторую гирю в 2 или 3 г, или, наконец, гирю в 4 г. Читатель, мы полагаем, ни на одну минуту не усомнится в выборе третьей гири. В самом деле, с гирями в 1 г, 2 г и 2 г. можно взвешивать грузы от 1 г до 5 г; с гирями же в 1 г, 2 г и 4 г—груз от 1 г до 7 г включительно ($5 = 4 + 1$; $6 = 4 + 2$; $7 = 4 + 2 + 1$). Продолжая рассуждать таким образом, мы придем к выводу, что в качестве четвертой гири выгоднее всего взять гирю в 8 г, так

---

*) Если гири можно класть на обе чашки весов, то можно взвесить груз в 1 грамм, не имея граммовой гири, именно, положив, напр., на одну чашку 3 г., а на другую взвешиваемый груз вместе с 2 г. При таком взвешивании можно обойтись еще меньшим числом гирь, чем указано в решении задачи, но такого рода взвешивание мы здесь рассматривать не будем.



как четырьмя гирями в 1 г, 2 г, 4 г и 8 г можно уже взвешивать груз от 1 г до 15 г, а именно:

$$\begin{aligned}9 &= 8 + 1\\ 10 &= 8 + 2\\ 11 &= 8 + 2 + 1\\ 12 &= 8 + 4\\ 13 &= 8 + 4 + 1\\ 14 &= 8 + 4 + 2\\ 15 &= 8 + 4 + 2 + 1\end{aligned}$$

Затем, пятой гирей у нас будет гиря в 16 г. Полученный таким образом ряд чисел: 1, 2, 4, 8, 16 есть не что иное, как хорошо нам знакомый из предыдущего параграфа ряд степеней числа 2. В самом деле, если продолжить наши рассуждения, то придем к числам того же ряда, именно, к 32, 64, 128 и т. д. Последнее обстоятельство легко себе уяснить: посредством гирь в 1 г, 2 г, 4 г и 8 г, можно взвесить, как было показано, груз от 1 г до 15 г включительно. Представим себе, что мы производим все эти 15 взвешиваний одно за другим; если при каждом взвешивании мы к гирям, лежащим на чашке весов, добавим гирю в 16 г, то получим, вместо взвешиваний от 1 г до 15 г, взвешивания от 17 г до 31 г. Для взвешивания 31 г понадобятся все 5 гирь (1 г, 2 г, 4 г, 8 г, 16 г), но взвесить 32 г этими гирями, очевидно не удастся. Из предыдущего параграфа мы знаем свойство, каким обладает каждое число нашего ряда: сумма нескольких первых чисел его на 1 меньше числа следующего за последним из них. Поэтому, понятно, что пятью гирями в 1 г, 2 г, 4 г, 8 г, 16 г мы можем самое большее взвесить груз в 31 г, так как их сумма должна быть на 1 меньше числа, следующего за 16 в ряду степеней числа 2. Присоединяя к нашим пяти гирям гирю в 32 г, мы, очевидно, сможем взвесить любое число граммов до 63 включительно. Наконец, присоединяя еще гирю в 64 г, мы получим семь гирь в 1 г, 2 г, 4 г, 8 г, 16 г, 32 г, 64 г, с которыми можно взвесить любой груз, не превышающий 127 г. Таким образом получается, что указанными семью гирями можно взвесить больший груз, чем, когда мы пользуемся упомянутыми ранее набором из 8 гирь, которыми можно взвесить лишь грузы до 110 г.

Во избежание недоразумений, следует заметить, что такие гири, численная величина которых совпадает с числами ряда степеней двух, все-таки неудобны, по причине, на которой мы останавливаться не будем.

Из решения заданной в этом параграфе задачи легко извлечь чрезвычайно важное предложение, которое нам пригодится в дальнейшем и которому мы дадим следующую формулировку:

*Каждое число может быть представлено в виде суммы степеней числа 2 и притом так, что каждая степень входит в эту сумму не более одного раза.*

Вопрос 10: Не будет ли набор разновесок в 1 г, 2 г, 4 г, 8 г, 16 г, 33 г, 65 г, которым можно взвесить также 128 г и 129 г, более выгоден, чем набор в 1 г, 2 г, 4 г, 8 г, 16 г, 32 г. и 64 г?

Вопрос 11: Какими гирями (в минимальном числе) можно заменить набор разновесок: в 1 г, 2 г. 2 г, 5 г, 10 г, 20 г, 20 г, 50 г, 100 г, 200 г, 200 г?

## § 3. Отгадывание задуманных чисел и предметов.

Данное в конце предыдущего параграфа предложение, что всякое число можно представить в виде суммы различных степеней числа 2, имеет применение в многочисленных играх и задачах,



которые основаны на так-называемом „двоичном счислении“. Некоторыми из них мы и займемся в этом и следующем параграфах *). Ради краткости числа ряда 1, 2, 4, 8.... будем впредь называть „основными числами“.

### I. Отгадывание задуманного числа.

*Несколько лиц в отсутствии А задумывают число; А берется отгадать его при условии, что лицо Б, находящееся с остальными в комнате, поможет ему, расположив в некотором порядке взятые для игры монеты.*

А и Б предварительно сговариваются, что орел монеты означает нуль, а решетка—различные степени числа 2, именно, 1—если решетка стоит на первом месте слева, 2—если на втором, 4—на третьем, 8—на четвертом и т. д. Б представляет задуманное число, как сумму „основных чисел“ 1, 2, 4, 8... Если, например, лицо Б образовало из монет фигуру, указанную на рис. 22, то это означает следующее. Первая монета слева показывает, что первое основное число (т.-е. 1) должно быть опущено, так как монета лежит орлом вверх; напротив, второе и третье основные часла (т.-е. 2 и 4) должны быть приняты во внимание, так как вторая и третья монета лежат вверх решеткой; четвертое основное число (8) надо пропустить; пятое (16) следует принять во внимание. *Задуманное* число равно $2+4+16=22$, которое А и провозглашает изумленным присутствующим.

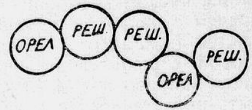


Рис. 22.

*) Впрочем, некоторые игры X и XI глав также основаны на двоичном исчислении.

## II. Отгадывание задуманной картинки.

*На большом картоне нарисовано 32 различных изображения, в 4 ряда по 8-ми в каждом. Лицо А предлагает лицу Х задумать одну из картинок и берется ее отгадать.*

Кроме большого картона с 32 рисунками, называемого „основным“ картоном, лицо А имеет еще пять небольших карточек; на каждом из них воспроизведены 16 рисунков основного картона (2 ряда по 8 в каждом). А показывает лицу Х один за другим эти небольшие карточки, каждый раз спрашивая, нет ли на них задуманного рисунка. На основании получаемых ответов, А отгадывает задуманный рисунок.

Очевидно, что сущность игры не изменится, если заменить 32 рисунка 32 различными числами, от 1 до 32 включительно. Первый рисунок заменяется числом 1, второй—2, последний числом 32; причем 8 рисунков первой строки сверху обозначаются числами от 1—8 слева направо, 8 рисунков второй строки сверху—числами от 9—16 тоже слева направо и т. д. Каждое из чисел 1—31 может быть представлено в виде суммы основных чисел 1, 2, 4, 8, 16 (последнее число 32, которое также есть основное число, мы пока не будем принимать во внимание). Далее, будем предполагать, что каждое из чисел 1, 2, 3 ... 31 представлено в виде суммы основных чисел, напр., число 23 в форме $1+2+4+16$. Получим 31 сумму. Можно ли узнать, сколько среди них имеется сумм, содержащих основное число 1? Очевидно, что 1 входит в качестве слагаемого во все суммы, изображающие нечетные числа, т. е. 1, 3, 5, 7, .... 31. Таких чисел всего 16, поэтому единица входит в 16 сумм.

Эти 16 нечетных чисел, или соответствующие им рисунки, нанесены на одной из пяти карточек.



Но не только основное число 1 входит в наши 31 сумму 16 раз; нетрудно убедиться, что каждое из остальных основных чисел,—2, 4, 8 или 16,—также входят в них 16 раз; напр., основное число 16 входит во все суммы чисел от 16 до 31. Поэтому, на второй из пяти карточек наносятся числа, содержащие в качестве слагаемого основное число 2, или соответствующие им рисунки. Таким же образом для основных чисел 4, 8, 16 приготовляются остальные три карточки. Число 32, или соответствующий ему рисунок, не входит ни в одну из этих карточек. Пять карточек, с нанесенными на них в возрастающем порядке числами, имеют вид, изображенный на фигуре 23. Заменив в них числа соответствующими им рисунками, расположенными в два горизонтальных ряда по 8 в каждом, мы

| I. | II. | III. | IV. | V. |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |
| 3 | 3 | 5 | 9 | 17 |
| 5 | 6 | 6 | 10 | 18 |
| 7 | 7 | 7 | 11 | 19 |
| 9 | 10 | 12 | 12 | 20 |
| 11 | 11 | 13 | 13 | 21 |
| 13 | 14 | 14 | 14 | 22 |
| 15 | 15 | 15 | 15 | 23 |
| 17 | 18 | 20 | 24 | 24 |
| 19 | 19 | 21 | 25 | 25 |
| 21 | 22 | 22 | 26 | 26 |
| 23 | 23 | 23 | 27 | 27 |
| 25 | 26 | 28 | 28 | 28 |
| 27 | 27 | 29 | 29 | 29 |
| 29 | 30 | 30 | 30 | 30 |
| 31 | 31 | 31 | 31 | 31 |

Фиг. 23.

получим пять карточек, о которых говорилось в начале этого параграфа.

Если лицо X укажет, что задуманный им рисунок находится, напр., на карточках II, III и V и отсутствует на I и IV, то лицо A будет рассуждать следующим образом. Числа каждой из карточек, как сказано, содержат в качестве слагаемого, соответственно числа 1, 2, 4, 8, 16 (на нашей фигуре 23 на каждой карточке верхнее число и есть соответствующее ему основное число). Поэтому, задуманному рисунку соответствует число, содержащее в качестве слагаемых второе, третье и пятое основные числа, т.-е. 2, 4 и 16, но не содержащие первого и третьего из них (1 и 8).

Задуманный рисунок занимает на основном картоне $2 + 4 + 16 = 22$-ое место.

Если же задуманный рисунок не находится ни на одной из небольших карточек, то это означает, что он занимает последнее, т.-е. 32-е место на основном картоне.

## § 4. Башня Люка.

Игра, придуманная французским математиком Люка, состоит из доски с тремя вертикально вставленными в нее палочками; на одной из них нанизаны пирамидально одна на другую несколько (у нас 8) круглых пластинок различной величины. *Игра заключается в том, что требуется перенести все пластинки на одну из свободных палочек, причем одним „ходом“ (приемом) можно переносить лишь одну пластинку, имея право накладывать ее только на большую, но никак не меньшую, ранее перенесенную.*

Само собою разумеется, что цели нужно достигнуть возможно меньшим числом ходов, избегая ненужных перенесений.



Пусть C—та палочка, на которую должны быть перенесены пластинки, а A—палочка, на которой в начале игры они находятся, как показано на фиг. 24. Начнем игру лишь с двух пластинок, удалив все остальные. Тогда верхнюю меньшую пластинку придется перенести на палочку B, затем нижнюю большую—на палочку C и, наконец, меньшую с палочки B на палочку C.

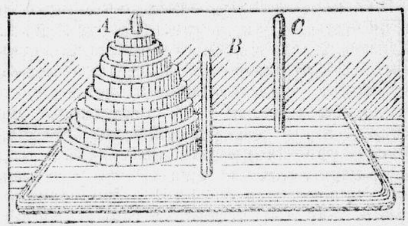



Рис. 24.

Имея лишь две пластинки, мы, таким образом, можем достигнуть цели всего только двумя перемещениями. Если же взять три пластинки—мы их назовем числами 1, 2, 3 (считая сверху)—то прежде, чем трогать самую большую пластинку 3, необходимо перенести пластинки 1 и 2 на одну из палочек B и C, выбрав ее так, чтобы потом пластинку 3 можно было перенести на C. Поэтому C должна остаться свободной, т.-е. пластинки 1 и 2 придется сперва перенести на B. Это достигается тремя перемещениями, именно, пл. (пластинка) 1 переносится с A на C, пл. 2—с A на B и, наконец, пл. 1—с C на B. По существу, здесь мы решили задачу с двумя пластинками, которые требовалось только перенести на В, а не на С. Затем, переносим пл. 3 с А на С; теперь уже остается перенести пл. 1 и 2 с В на С, что опять достигается тремя перенесениями (пл. 1 с В на А, пл. 2—с В на С, пл. 1 – с А на С). При трех пластинках необходимо, следовательно, 7 перенесений. Легко предвидеть число перемещений с большим числом пластинок. Чтобы перенести 4 пластинки с А на С придется прежде всего пл. 1, 2 и 3 перенести с А на В (7 перенесений), затем пл. 4—с А на С, (одно перенесение) и, наконец, пл. 1, 2 и 3—с В на С (семь перенесений), следовательно, всего понадобится 15 перенесений. Итак, для перемещения 4-х пластинок придется решить прежде всего задачу с 3 пластинками, т.-е. аналогичную предыдущей, где лишь В и С поменялись ролями. Поэтому, если решение предыдущей задачи начиналось с „пл. 1 переносится с А на С", то это начнется с „пл. 1 переносится с А на В". Присоединяя сюда первую задачу, мы можем составить следующую табличку для первого перемещения:

| | | | |
|---|---|---|---|
| при 2 пластинках: | „пл. 1 | переносится | с А на В" |
| „ 3 | „ | „пл. 1 | „ | с А на С" |
| „ 4 | „ | „пл. 1 | „ | с А на В". |

Так как при каждом увеличении числа пластинок на одну, палочки В и С меняются ролями, то всегда первый ход либо начинается так: „пл. 1 переносится с А на Б", либо же: „пл. 1 переносится с А на С"; и первый случай бывает при четном, второй же—при нечетном числе пластинок. Называя С „конечной", а В „вспомогательной" палочкой, мы можем сказать:

*При нечетном числе пластинок игра начинается с переноса меньшей пластинки на конечную палочку, а при четном числе пластинок — на вспомогательную.*



Это правило, легко запоминающееся, имеет большое значение в практике игры; смешение же этих двух случаев безусловно исключается, если еще принять во внимание, что в наиболее простом случае, с одной пластинкой, правило очевидно само собой.

Для числа требуемых перенесений мы получили:

| | | | |
|---|---|---|---|
| при 1 | пластинке | — 1 | перенесение |
| „ 2 | „ | — 3 | „ |
| „ 3 | „ | — 7 | „ |
| „ 4 | „ | — 15 | „ |

Полагая, что читатель отгадал закон образования числа перенесений, мы подойдем к этому вопросу с более удобной точки зрения. Спросим себя, сколько из 15 перенесений, необходимых для игры с 4 пластинками, приходится на пластинку 1, 2, 3, 4? Из трех перенесений, необходимых для игры с 2 пластинками, два перенесения приходятся на пластинку 1 и одно на—2. Это мы запишем так:

2 пластинки:

| | |
|---|---|
| Пластинка 1 . . . . . . | 2 перенесения |
| „ 2 . . . . . . | 1 перенесение |
| Итого . . . . | 3 перенесения |

При трех пластинках решение расчленяется на три ступени: перенесение пластинок 1 и 2 с А на В, пластинки 3 с А на С, и пластинок 1 и 2 с В на С. Отсюда видно, что перенесение двух пластинок (1 и 2) происходит дважды; поэтому число перенесений этих пластинок удваивается по сравнению с ранее разобранным случаем. Имеем:

3 пластинки:

| | |
|---|---|
| Пластинка 1 . . . . . . | 4 перенесения |
| „ 2 . . . . . . | 2 „ |
| „ 3 . . . . . . | 1 перенесение |
| Итого . . . . | 7 перенесений |

4 пластинки:

| | | |
|---|---|---|
| Пластинка | 1 . . . . . . . | 8 перенесений |
| „ | 2 . . . . . . . | 4 „ |
| „ | 3 . . . . . . . | 2 „ |
| „ | 4 . . . . . . . | 1 перенесение |
| Итого | . . . . | 15 перенесений |

Числа перенесений отдельных пластинок, считая снизу вверх (1, 2, 4, 8 в последнем случае), суть степени числа 2; и не только в этих простейших случаях, но и в более сложных, как нетрудно убедиться постепенным переходом от одного случая к следующему. При таком переходе числа перенесений предыдущего столбца удваиваются и снизу приписывается 1. Общее число перенесений в каждом отдельном случае на 1 меньше ближайшей степени числа 2 *); например, при пяти пластинках, общее число перенесений равно 31 ($2^5-1=32-1$).

Вопрос 12. Сколько понадобится всех перенесений для 7 пластинок? Сколько перенесений придется в этом случае на пластинку 1 и на пластинку 5?

## Глава V.

## Меледа.

В Лейпцигском музее имеется замечательная игра китайского происхождения, изображенная на фиг. 25 в уменьшенном виде. Верхняя часть ее состоит из челнока в форме ножниц, с соединенными концами, и 9 колец; металлические части всей игры сделаны из желтой меди. Эта остроумная игра известна в Европе более 400 лет и в различных государствах носит разные названия. Мы назовем

*) У которой показатель степени равен числу пластинок.



ее „меледой“. Для лучшего уяснения сущности игры, возьмем вместо китайского экземпляра с 9-ю

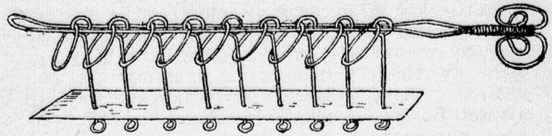


Рис. 25.

кольцами более простой с меньшим числом колец. На рис. 26 дано схематическое изображение ме-

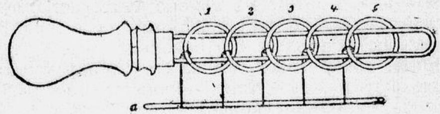



Рис. 26.

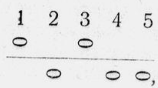
леды с 5-ю кольцами. Устройство и сущность игры заключаются в следующем:

*Каждое из пяти колец, надетых на челнок, прикреплено посредством проволоки к пластинке (на нашей фиг. пластинка обозначена буквой а). Каждая проволока проходит через челнок; кроме того, проволока, прикрепленная к какому-либо кольцу, проходит внутрь соседнего, находящегося от него влево, за исключением первой проволоки (на фиг. 26 первая слева). Требуется снять с челнока всю систему колец вместе с пластинкой.*

Читатель, незнакомый с теорией игры, наверное возьмет прежде всего в левую руку рукоятку челнока, а правой будет тянуть все кольца к концу челнока, в результате все кольца повиснут на одной из дуг челнока; в конце концов читатель убедится, что выбранный им способ не достигает цели, а лишь спутывает проволоки. На самом же деле, легко заметить, что отдельные кольца могут быть спущены с челнока вниз; приэтом они снимаются с него, а затем пропускаются между его дугами. Возникает вопрос, в каком порядке следует производить эти манипуляции с кольцами, чтобы поскорее отделить челнок от колец с пластинкой? Желая спустить пятое кольцо, следует его прежде всего снять с челнока, а затем продеть между дугами последнего. Если желают спустить четвертое кольцо, то снимают одновременно с челнока 4 и 5, а затем 4-е кольцо продевается между дугами, 5-е же одевается обратно на челнок. Если же желают спустить 4 и 5 кольца вместе, то их снимают сразу с челнока, затем одновременно же продевают между дугами. Процесс освобождения челнока от одного кольца будем называть „спусканием“, а обратную манипуляцию — „поднятием“; приэтом обозначим кольца нумерами, указанными на фиг. 26. Нетрудно убедиться в справедливости следующего правила:

*Кольцо может быть поднято или спущено, когда следующее за ним справа надето на челнок, а остальные, находящиеся по ту же сторону, уже спущены; только последнее кольцо (5) при всяких положениях может быть поднято или спущено*:

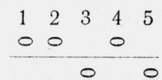
Пусть нам дано расположение колец, изображенное на схеме:






где черта обозначает челнок, кружки над ней — кольца поднятые (надетые); кружки под ней — кольца спущенные. В таком случае кольцо 2 может быть поднято, потому что следующее за ним кольцо (3) находится на челноке, а кольца (4 и 5), следующие за последним (3), спущены. Напротив, кольца 1 и 3 не могут быть спущены, а кольцо 4 не может быть поднято; но если поднять последнее (5) кольцо, то удастся поднять и кольцо 4.

Чтобы решить нашу основную задачу, именно — спустить с челнока все кольца, — следовало бы прежде всего спустить кольцо 1, так как в дальнейшем мы его сможем исключить из рассмотрения, а удаление оставшихся 4 колец представляет, понятно, ту же основную задачу, но с меньшим числом колец. Но, чтобы спустить кольцо 1, согласно нашему правилу, необходимо, чтобы кольцо 2 было на челноке, а кольца 3, 4 и 5 — спущены. Для спуска кольца 3, необходимо, чтобы кольцо 4 было на челноке, а кольцо 5 спущено. Следовательно, мы приходим к выводу, что для спуска кольца 3, необходимо получить такое расположение колец, при котором кольцо 4 находится на челноке, а кольцо 5 спущено. Поэтому, взяв челнок с надетыми пятью кольцами, спускаем кольцо 5, — тогда нам не представит труда спуск кольца 3. Получим такое расположение колец:




Чтобы спустить кольцо 4, необходимо (по нашему правилу) прежде всего поднять кольцо 5 и затем одновременно спустить кольца 4 и 5 так, как указано было выше. Получим уже такое расположение колец:

```
1 2 3 4 5
o o
---------
    o o o,
```

необходимое, как сказано было, для того, чтобы можно было спустить кольцо 1. В результате имеем следующее расположение:

```
1 2 3 4 5
  o
---------
o   o o o
```

Теперь можно уже исключить из рассмотрения кольцо 1. Далее, постараемся спустить кольцо 2, для чего необходимо поднять кольцо 3. Но это возможно лишь тогда, когда поднято кольцо 4, а последнее достигается поднятием кольца 5. Поэтому, необходимо, прежде всего, поднять одновременно кольца 4 и 5, а это, как сказано было выше, возможно. Получим такое расположение:

```
1 2 3 4 5
  o   o o
---------
o   o
```

Для поднятия кольца 3,необходимо спустить кольцо 5, так что последовательно получим следующие два расположения:

```
1 2 3 4 5       1 2 3 4 5
  o   o     и     o o o
---------       ---------
o   o   o       o       o
```

Но для спуска кольца 2, нужно не только, чтобы кольцо 3 было на челноке, но и чтобы кольца 4



и 5 были спущены, для чего необходимо поднять кольцо 5; в результате получим расположение:

```
1 2 3 4 5
  o o o o
---------
o
```

Это расположение—есть по существу начальное расположение нашей игры с 4 кольцами. От этого же расположения спусканием колец 4 и 5 переходим к такому:

```
1 2 3 4 5                   1 2 3 4 5
  o o         а от него к       o
---------                   ---------
o     o o,                  o o   o o,
```

чем исключается из рассмотрения и кольцо 2. Для спуска кольца 3 необходимо поднять кольцо 4, а для этого необходимо, в свою очередь, поднять кольцо 5; поэтому мы поднимаем одновременно кольца 4 и 5 и получаем расположение

```
1 2 3 4 5
    o o o
---------
o o
```

(начальное расположение игры с тремя кольцами).

От этого расположения переходим к такому:

```
1 2 3 4 5                 1 2 3 4 5
    o o       затем, к          o
---------                 ---------.
o o     o                 o o o   o
```

Подняв кольцо 5 и спустив одновременно кольца 4 и 5, отделим, наконец, систему колец от челнока. Задача таким образом решена.

Обратно, чтобы вновь надеть все кольца на челнок, приходится повторить те же манипуляции, но в обратном порядке, заменяя слово „спуск“ словом

„поднятие“, а слово „поднятие“—словом „спуск“. А именно:

| | |
|---|---|
| 1. Поднятие 4 и 5. | 9. Спуск 3. |
| 2. Спуск 5. | 10. Поднятие 5. |
| 3. Поднятие 3. | 11. Спуск 4 и 5. |
| 4. Поднятие 5. | 12. Поднятие 1. |
| 5. Спуск 4 и 5. | 13. Поднятие 4 и 5. |
| 6. Поднятие 2. | 14. Спуск 5. |
| 7. Поднятие 4 и 5. | 15. Поднятие 3. |
| 8. Спуск 5. | 16. Поднятие 5. |

От математического обоснования предыдущих выводов мы принуждены здесь отказаться. Заметим лишь, что эта теория тесно связана с теорией ряда степеней 2 (стр. 45). Исходя из нее, можно доказать, что избранный нами способ решения задачи—самый короткий. Этот способ решения, примененный нами к частному случаю игры, именно—с 5-ю кольцами,—требует 16 операций, считая одновременное поднятие или спуск двух последних колец (4 и 5) за *одну* операцию. Математическая теория этой игры дает возможность определить наименьшее число операций для любого числа колец. Здесь мы даем лишь таблицу числа таких операций для сравнительно небольшого числа колец.

| Число колец. | Число операций. |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 3 | 4 |
| 4 | 7 |
| 5 | 16 |
| 6 | 31 |
| 7 | 64 |
| 8 | 127 |
| 9 | 256 |
| 10 | 511 |
| 11 | 1024 |
| 12 | 2047 |
| 20 | 524287 |



При 65 кольцах, наименьшее число требуемых операций выражается 20-ти-значным числом, на 1 бо́льшим числа всех пшеничных зерен шахматной доски (стр. 39).

Вопрос 13. Каково должно быть начальное положение 5-ти колец, при котором потребуется наибольшее число операций, чтобы снять с челнока все кольца? Сколько операций потребуется в этом случае?

## Глава VI.

# Ним.

### § 1. Описание игры и краткое изложение ее теории.

Происхождение этой игры неизвестно. В нее играют в некоторых американских школах; на американских ярмарках можно иногда видеть даже группы взрослых, в нее играющих. В Германии игра эта известна давно: там ее чаще всего называют „Фан-Тан“. Но так как этим именем в Китае называют другую, очень азартную игру, весьма там популярную, нам пришлось заимствовать у американского математика другое название, данное в заголовке настоящей главы.

*Для этой игры берется обыкновенно некоторое количество однородных предметов, например, спичек или камешков. Играют двое. Начинают с того, что образуют, например, из камешков три „кучки“, из которых каждая содержит не более 7, но не менее одного камешка (мы могли бы выбрать вместо 7 другое число, но остановились на нем ради простоты изложения). Один из играющих берет из какой-либо кучки произвольное число камешков, хотя бы 1, но может взять и все или, например, 5, 3 и т. д. В пределах одной* *кучки и только одному играющему предоставлена таким образом полная свобода; выбор кучки также свободен, но играющий не может брать камешки одновременно из двух или трех кучек. Затем, второй из играющих, с своей стороны, по тем же правилам продолжает игру, причем может остановить свой выбор или на кучке, из которой взял первый, или на другой. Так попеременно продолжают игру, пока имеются камешки. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень.*

Каждое изъятие камешков будем для сокращения называть „ходом". Математическая теория игры покажет, что один из играющих должен непременно выиграть. Выиграет ли сделавший первый ход или его партнер,—зависит исключительно от начального положения камней.

Отдельные стадии, на которые распадается игра, вполне характеризуются числом камешков, в каждой из трех кучек. Если в начале или посреди игры одна кучка содержит один камешек, вторая—4, третья—6, мы запишем это так: 1, 4, 6—говоря, что рассматриваемая стадия игры имеет „позицию" 1, 4, 6. Приэтом (по причинам, указанным ниже) ряд определенных позиций, именно:

| | | |
|---|---|---|
| 1, 2, 3 | 2, 4, 6 | 3, 4, 7 |
| 1, 4, 5 | 2, 5, 7 | 3, 5, 6 |
| 1, 6, 7 | | |

(Система I).

мы будем называть „особенными", а остальные—напр., 1, 4, 6 или 3, 4, 4—„обыкновенными". Читатель, конечно, поймет, что число „обыкновенных" позиций значительно больше числа „особенных". Если, напр., в одной кучке 2 камешка, в другой—4, то позиция будет „особенной" лишь в том случае, когда в 3-ей кучке их будет 6. Во всех остальных случаях, т.-е., когда в 3-й кучке имеется 1, 2, 3, 4, 5



или 7 камешков, позиция будет обыкновенной,—потому что в „системе 1" мы находим позицию 2, 4, 6, но не 2, 4, 1 или 2, 4, 2 или 2, 4, 3, и т. д. Если убрана целая кучка, то называют „особенными" позициями лишь те, у которых оставшиеся кучки содержат одинаковое количество камешков; все остальные позиции с 2 кучками, содержащими неодинаковое количество камешков, будут „обыкновенными". Позиции с одной кучкой мы будем называть также „обыкновенными". Таким образом к „особенным" позициям системы 1 необходимо присоединить следующие „особенные" позиции:

| | | |
|---|---|---|
| 0, 1, 1 | 0, 4, 4 | 0, 6, 6 |
| 0, 2, 2 | 0, 5, 5 | 0, 7, 7 |
| 0, 3, 3 | | |

(Система II),

а также позицию 0, 0, 0, доставляющую победу игроку, достигшему ее. Включая последнюю, мы имеем таким образом 15 „особенных" позиций, в то время, как простой подсчет показывает, что „обыкновенных" позиций всего 105. Для „особенных" позиций имеем следующие два предложения, которые будут доказаны в § 2:

1) *От „особенной" позиции нельзя одним ходом перейти к такой же „особенной", но можно перейти лишь к обыкновенной.*

2) *От „обыкновенной" позиции можно одним ходом перейти к одной из многих „обыкновенных" же, но кроме того, по крайней мере, к одной из „особенных".*

В дальнейших параграфах, мы увидим, что особенные позиции дают возможность играющему выиграть. Поэтому данные только что два предложения приводят к следующему правилу игры: *Игрок должен стремиться своим ходом достичь „особенной" позиции. Если ее достиг, напр., игрок А, то*

*Б своим ходом может перейти от этой „особенной“ позиции лишь к обыкновенной, согласно предложению 1. Тогда А (предложение 2) может ее превратить опять в „особенную“ и т. д. Таким образом, игрок А своими ходами будет получать одну за другой „особенные“ позиции и в результате неизбежно выиграет.*

## § 2. Обоснование теории игры.

Нетрудно убедиться в справедливости данных в предыдущем параграфе двух предложений. Для этой цели рассмотрим отдельные частные случаи. Для доказательства *первого предложения* разберем особенную позицию *системы II*, напр., 0, 5, 5. Легко понять, что ближайшим ходом она необходимо должна превратиться в обыкновенную позицию. Ведь приэтом одна из оставшихся кучек может совсем исчезнуть, или число ее камешков может уменьшиться и тем самым стать меньше второй, поэтому позиция 0, 5, 5 может перейти в 0, 0, 5 или, напр., в 0, 2, 5; но последние позиции по нашему определению — „обыкновенные“. Таким образом, „особенная“ позиция системы II каким бы то ни было ходом переводится в обыкновенную, что и соответствует предложению 1. Но это же предложение будет справедливо и для позиции системы I; чтобы доказать это, рассмотрим позицию 2, 5, 7. Если ближайшим ходом мы уберем одну из кучек, то наша позиция перейдет в обыкновенную, так как оставшиеся кучки будут содержать неравное число камешков. Остается рассмотреть тот случай, когда ближайшим ходом мы уменьшаем число камешков одной кучки, так что их останется попрежнему 3. Если уберем один камешек из первой кучки, то вновь образовавшаяся позиция 1, 5, 7—„обыкновенная“, так как в списке „особенных“ позиций



системы I, содержащих число 1, нет содержащих одновременно 5 и 7 (система I, первый столбец). При уменьшении же числа камешков второй кучки, в первой во всяком случае будет попрежнему 2, а в третьей—7. Но в системе 1 имеется одна позиция, содержащая одновременно 2 и 7, именно, позиция 2, 5 и 7, которую мы и рассматриваем. Поэтому при уменьшении второй кучки получается обыкновенная позиция. Рассуждая таким же образом, можно убедиться, что при уменьшении третьей кучки получается опять-таки обыкновенная позиция.

Читатель, наверно, уже сам догадался, в чем тут суть дела. Система I „особенных“ позиций составлена так, что 2 числа каждой позиции, напр., 3 и 7 позиции 3, 4, 7, входят одновременно лишь только в последнюю и нет другой, которая содержала бы 3 и 7. С другой стороны, каждая пара чисел, напр., 2 и 5, непременно входит в одну и только одну из позиций системы I, именно, в 2, 5, 7. Нам еще придется вернуться к более глубокому изучению системы I, а теперь, для наглядного представления ее, воспользуемся следующим примером. Пусть числами 1, 2 . . . . 7 обозначены члены игорного клуба, где играют в скат—игра, возможная только при трех партнерах; назовем этих членов так: первого—Ивановым, второго—Улановым, третьего—Капустиным, четвертого—Сидоровым, пятого—Петровым, шестого—Матвеевым, седьмого—Александровым. Комбинациям трех чисел системы 1 здесь соответствуют партии в скат трех членов клуба. Система 1 содержит только 7 позиций; пусть эти 7 позиций соответствуют 7 дням недели, т.-е. из членов клуба каждый вечер недели играют лишь трое. Составим теперь расписание игры в клубе, положив в основание систему 1:

Воскресенье: Иванов, Уланов, Капустин (1, 2, 3).
Понедельник: Уланов, Сидоров, Матвеев (2, 4, 6).

Вторник: Капустин, Сидоров, Александров (3, 4, 7).
Среда: Иванов, Сидоров, Петров (1, 4, 5).
Четверг: Уланов, Петров, Александров (2, 5, 7).
Пятница: Капустин, Петров, Матвеев (3, 5, 6).
Суббота: Иванов, Матвеев, Александров (1, 6, 7).

Легко заметить следующее: каждый член клуба играет одинаковое число раз в неделю, именно, три раза. Приэтом каждый из них играет лишь один раз в неделю с каждым из остальных: в первый вечер с какими-либо двумя, во второй—с двумя другими, в третий—с двумя остальными *). Напр., Капустин играет в воскресенье, вторник и пятницу, в воскресенье—с Ивановым и Улановым, во вторник—с Сидоровым и Александровым, в пятницу с Петровым и Матвеевым. Этого достаточно для наглядного изображения системы 1.

Постараемся теперь объяснить второе предложение. Первая его часть, заключающаяся в том, что „обыкновенная" позиция одним ходом может быть приведена к другой „обыкновенной", напр., 1, 2, 5—в 1, 2, 4 или 1, 2, 2 или 1, 2, 1 или в 1, 2, 0—не нуждается в доказательстве. Остается доказать вторую часть предложения, именно, что всякая обыкновенная позиция может быть приведена одним лишь ходом, по крайней мере, к *одной* особенной. Легче всего доказывается это для 2 кучек. Пусть, напр., имеется позиция 0, 4, 7; чтобы получить из нее „особенную" позицию, следует лишь в обеих кучках уравнять число камешков, что и достигается уменьшением большой на 3 камешка; тогда имеем позицию 0, 4, 4. Если в „обыкновенной" позиции имеется только одна кучка, так что позиция имеет, напр., вид 0, 0, 4, то само собою

*) Здесь не принимается во внимание, как распределяются вечера какого-либо члена—следуют ли они один за другим подряд, или в каком-либо ином порядке.



разумеется, что ближайшим ходом следует убрать и эту кучку; получается „особенная" позиция 0, 0, 0, означающая выигрыш взявшего кучку *). Если имеется обыкновенная позиция с 3-мя кучками, например, 3, 6, 7, то ни в коем случае не следует убирать целую кучку. В данном случае надо лишь какую-либо кучку уменьшить. Если мы пожелаем уменьшить число камешков первой кучки, то числа 6 и 7 останутся без изменения. Единственной же „особенной" позицией, в которую входят одновременно 6 и 7—является 1, 6, 7; поэтому необходимо уменьшить число камешков первой кучки с 3-х до единицы. Таким же образом придем к выводу, что вторую кучку следовало бы уменьшить с 6 до 4-х или третью—с 7 до 5-ти, чтобы получить соответственно „особенные" позиции 3, 4, 7 и 3, 6, 5. В данном случае ближайшим ходом можно перейти от „обыкновенной" к „особенной" тремя способами. В общем же случае такие возможности не всегда представляются; для нас же достаточно, если имеется хотя бы *одна* такая возможность. Возникает вопрос, всегда ли представится такая возможность. Если мы не ответим на этот вопрос, то в нашем доказательстве будет большой пробел. С другой стороны, исчерпывающий ответ заставит нас углубиться в математическую теорию игры. Читатель, не интересующийся ею, может ее пропустить и прямо перейти к параграфу 3.

Следовало бы уже раньше ответить на вопрос, чем собственно отличается „особенная" позиция от „обыкновенной" и каким образом могут быть получены „особенные позиции", в частности позиции системы I. Чтобы ответить на этот вопрос, напомним, прежде всего, читателю о ряде степеней

*) Читатель видит, что присоединение позиции 0, 0, 0 к особенным позициям не произвольное, а имеет глубокое основание в самой сущности игры.

числа 2 (стр. 41), начинающемся с 1 и в котором каждое число, начиная со 2-го, равно удвоенному предшествующему: 1, 2, 4, 8, 16. . . . Для дальнейшего нам понадобится лишь начало ряда . . . 1, 2, 4. Напомним только, что любое число может быть представлено в виде суммы чисел этого ряда (стр. 44); числа от 1 до 7, которые для нас в данном случае наиболее важны, могут быть представлены так:

$$
\begin{array}{l}
\qquad\quad 4 \quad\ 2 \quad\ 1 \\
\hline
1 = \qquad\qquad\ \ 1 \\
2 = \qquad\ \ 2 \\
3 = \qquad\ \ 2 + 1 \\
4 = 4 \\
5 = 4 + \qquad\ \ 1 \\
6 = 4 + 2 \\
7 = 4 + 2 + 1
\end{array}
$$

Числа 4, 2, 1, ради краткости будем называть основными числами (стр. 45). Возьмем какую-либо позицию системы 1, напр., 3, 4, 7, и подпишем ее числа одно под другим в виде сумм основных чисел:

$$
\begin{array}{l}
3 = \qquad\ \ 2 + 1 \\
4 = 4 \\
7 = 4 + 2 + 1
\end{array}
$$

По правую сторону знаков равенства (=) каждое из основных чисел в каждом столбце входит два раза. Вообще, во всякую позицию системы I, числа которой представлены в виде сумм основных чисел, каждое основное число входит либо *два*, либо *ни одного раза*. Примером второго случая может служить особенная позиция 2, 4, 6:

$$
\begin{array}{l}
2 = \qquad\ \ 2 \\
4 = 4 \\
6 = 4 + 2
\end{array}
$$



в которую основные числа 2 и 4 входят по два раза, а основное число 1—ни одного. Но *никогда* основные числа не входят во все суммы „особенной“ позиции *1 или 3 раза*; если же это случается, то позиция непременно должа быть „обыкновенной“. Что „особенные“ позиции системы II обладают тем же свойством по отношению к основным числам, видно из того, что каждая из них, если не принимать во внимание 0, состоит из 2 равных чисел, так что это свойство само собою выполняется. Но все позиции систем I и II не только обладают указанным свойством, присущим вообще особенным позициям, но они и *единственные*, имеющие это свойство. Взяв какую-либо „обыкновенную“ позицию,—следовательно, не находящуюся в системах I и II, —можно убедиться, что она не имеет указанного свойства. Возьмем, напр., позиции 1, 2, 4 и 3, 6, 7, не принадлежащие к системам I и II, и представим их числа в виде сумм основных чисел:

$$
\begin{array}{lcl}
1 = \qquad\quad 1 & \qquad\qquad & 3 = \qquad\ \ 2 + 1 \\
2 = \quad\ 2 & & 6 = 4 + 2 \\
4 = 4 & & 7 = 4 + 2 + 1
\end{array}
$$

В первой—основные числа 1, 2, 4 встречаются лишь по одному разу; во второй —числа 4 и 1—по два, а основное число 2 — три раза. Обе позиции не обладают требуемым свойством. Ради полноты заметим, что позиция 0, 0, 0 также удовлетворяет установленному свойству, а потому мы имеем вполне законное основание причислить ее к „особенным“.

*Определение* „основной“ позиции этим исчерпано. Теперь мы знаем, что если три ее числа представить в виде сумм основных чисел, то все три суммы, вместе взятые, содержат каждое основное число или 2 раза, или ни одного раза; на частных же примерах мы убедились, что все особенные позиции действительно обладают этим характерным для них свойством, чего нельзя сказать об обыкновенных.

Придадим теперь данному определению несколько иную форму и ответим на выше поставленный вопрос (стр. 65) о способе получения всех особенных позиций. Пусть, напр., мы, исходя из данного нами определения особенных позиций, ищем такую, которая содержит числа 3 и 5. Требуется найти ее третье число. Мы можем написать:

$$\begin{aligned} 3 &= \phantom{4+{}} 2 + 1 \\ 5 &= 4 \phantom{{}+2} + 1 \end{aligned}$$

Так как эти две суммы содержат 4 и 2 по одному, а 1—два раза, то третье число искомой позиции должно содержать основные числа 4 и 2 по одному разу, а основное число 1—ни одного раза; следовательно, третье число равно $4 + 2 = 6$. Полученная позиция 3, 5, 6 удовлетворяет требованию данного нами определения „особенной“ позиции, а потому она „особенная“. Она находится среди позиций системы I. Таким образом, для каждых двух данных чисел можно найти одно и *только одно* третье число, которое с данными двумя образует „особенную“ позицию: позиция 3, 5, 6 есть единственная „особенная“ позиция, в которую числа 3 и 5 входят совместно. Нам теперь легко заполнить пробел, допущенный в рассуждениях стр. 65. Там мы без особенных к тому оснований утверждали, что характерным свойством позиций системы I является следующее: для каждых двух чисел среди этих позиций имеется только одна, в которую они одновременно входят. Теперь же это свойство доказано вполне. Мы могли бы для каждых двух чисел ряда 1, 2, 3 . . . . 7 найти третье число, образующее с ними „особенную“ позицию подобно тому, как сделали это для чисел 3 и 5. Выписав все полученные таким образом позиции системы 1 и присоединив к ним позиции системы 2, мы получили бы все особенные позиции. Для образования позиций системы I нет надобности перебирать все комбинации по два числа ряда 1, 2, 3 . . . . 7. Следует лишь заметить, что, если бы мы исходили не из пары чисел 3, 5, но из пары—3, 6, то указанным выше приемом мы пришли бы, конечно, к числу 5, т.-е. получили бы ту же особенную позицию 3, 5, 6; поэтому мы можем игнорировать комбинацию 3, 6, раз для этих 2-х чисел особенная позиция (3, 5, 6) уже найдена. Во всяком случае, указанным выше способом легко получить все позиции „системы I“ и убедиться, что, кроме позиций системы I и II и 0, 0, 0, никакие другие—свойствами „особенных“ не обладают.

Из предыдущего легко понять, каким образом можно от обыкновенной позиции перейти к особенной. В самом деле: пусть дана „обыкновенная“ позиция. В таком случае по крайней мере одно из основных чисел 4, 2, 1 входит в нее один или три раза—иначе она была бы „особенной“. Например, позиция 3, 6, 7 содержит два раза основное число 4, три раза—2, два раза—1:

$$\begin{aligned} 3 &= \phantom{4+{}} 2 + 1 \\ 6 &= 4 + 2 \\ 7 &= 4 + 2 + 1 \end{aligned}$$

Легко понять, что при переходе от этой позиции к „особенной“, нет надобности менять число четверок. Точно так же нет нужды в изменении числа единиц. Напротив, желая удовлетворить условию, которому подчиняется особенная позиция, мы должны число двоек уменьшить на одну. Для этой цели достаточно уменьшить число камешков какой-либо кучки на два: либо уменьшить число камешков первой с 3 до 1, либо второй—с 6 до 4, либо третьей—с 7 до 5. В первом случае получается „особенная" позиция—1, 6, 7; во втором—3, 4, 7; в третьем—3, 5, 6. Эти три позиции мы получили выше из непосредственного рассмотрения позиций системы I (стр. 60). Рассмотрим еще в качестве примера позицию, о которой мы упомянули на стр. 64, именно 1, 2, 4:

$$\begin{aligned} 1 &= \quad\quad 1 \\ 2 &= \quad 2 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

Первое основное число, не удовлетворяющее известному нам условию особенной позиции, есть число 4 (читатель, должно быть, заметил, что мы рассматриваем раньше число 4, потом—2, а затем лишь—1). Так как эта позиция содержит основные числа 2 и 1 по одному разу, то число 4, при переходе к особенной позиции, придется заменить $2+1$. Во вновь полученную позицию число 4 совсем не войдет, а 2 и 1 войдут по два раза. Практически это означает, что для перехода от „обыкновенной" позиции 1, 2, 4 к „особенной", придется из третьей кучки убрать один камешек; получим особенную позицию 1, 2, 3. Для последнего случая существует лишь один переход к „особенной" позиции (для предыдущего—три), так как можно лишь уменьшать кучки, но не увеличивать, причем одним ходом мы имеем право уменьшать лишь одну *кучку*, но не более. Поэтому мы должны были наибольшее основное число 4, входящее в позицию (1, 2, 4), совершенно устранить и к основным числам 2 и 1, входящих также по одному разу, присоединить еще одну двойку и одну единицу. Таким образом мы убедились, что переход от обыкновенной позиции



к особенной всегда возможен *), чем вполне доказано предложение второе параграфа 1 настоящей главы (стр. 61).

## § 3. Техника игры.

Предыдущие рассуждения дают возможность установить правила, которыми следует руководствоваться при игре, хотя в сущности они были уже даны—правда, без доказательств, в конце § 1. Так как „обыкновенных" позиций значительно больше, чем „особенных", то произвольно взятые 3 кучки камешков **) в большинстве случаев образуют „обыкновенную" позицию. Начинающий игрок А своим первым ходом превратит начальную позицию в „особенную"; второй игрок В может эту „особенную" позицию превратить лишь в „обыкновенную"; затем А может последнюю превратить в „особенную" и т. д. Игрок А будет последовательно переходить от одной „особенной" позиции к другой такой же—и в результате выиграет ***). Таким образом, если произвольно взятая начальная позиция — обыкновенная (что, как сказано было, большей частью и бывает), то выигрывает начинающий; если же начальная позиция

*) Переход от „обыкновенной" к „особенной" позиции возможен во всех случаях, когда наибольшее основное число входит в позицию один или три раза, а некоторые или все остальные основные числа входят по одному разу, так как наибольшее основное число больше суммы всех предыдущих основных чисел.

**) Начальное положение выбирается играющими или по жребию, или же иным путем; в крайнем случае, они могут попросить постороннее лицо, незнакомое с теорией игры, выбрать начальное положение.

***) Поэтому, особенные позиции, к которым, естественно, должны стремиться каждый играющий, называют также „правильными", а обыкновенные—„неправильными".

особенная — то выигрывает при правильной игре второй игрок.

Как протекает на самом деле игра, легче увидеть на частном примере; ходы мы пронумеруем, указывая для каждого играющего позицию, достигнутую им данным ходом:

Начальная позиция: 4, 5, 6

| | A | | B |
|---|---|---|---|
| 1) | 3, 5, 6 | примерно | 3, 5, 4 |
| 2) | 1, 5, 4 | „ | 1, 4, 4 |

Игрок А, если он желает выиграть, должен убрать последний камень первой кучки, тогда образуется особенная позиция с двумя кучками с одинаковым числом камешков (система II), следовательно:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3) | 0, 4, 4 | примерно | 0, 2, 4 |

Игрок А должен теперь взять из второй (большей) кучки столько камешков, чтобы число последних в обеих кучках стало опять одинаковым; следовательно:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4) | 0, 2, 2 | примерно | 0, 1, 2 |
| 5) | 0, 1, 1 | „ | 0, 1, 0 |
| 6) | 0, 0, 0 | | |

Само собою разумеется, что мы отнюдь не обязаны ограничиваться максимальным числом 7; мы могли бы установить другой максимум для числа камешков в каждой кучке. И если мы выбрали за такое число 7, то руководствовались лишь соображениями удобства: чтобы не затемнять сущности игры большими числами. Читатель сможет сам, руководствуясь соображениями § 2, составить систему особенных позиций и для другого максимального числа камешков каждой кучки. Напр., если одна кучка содержит 7 камешков, другая—9, то для получения особенной позиции с числами 7 и 9



придется представить 7 и 9 в виде суммы основных чисел, в состав которых теперь войдет, кроме 1, 2 и 4, еще число 8:

$$7 = 4 + 2 + 1$$
$$9 = 8 + \quad 1$$

Третье число должно быть равно $8 + 4 + 2 = 14$; следовательно, особенная позиция, содержащая числа 7 и 9, есть 7, 9, 14. Если, напр., максимальное число камешков каждой кучки — 15, то путем продления прежней системы I получим такую систему „особенных“ позиций:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1, 2, 3 | 2, 4, 6 | 3, 4, 7 | 4, 8, 12 |
| 1, 4, 5 | 2, 5, 7 | 3, 5, 6 | 4, 9, 13 |
| 1, 6, 7 | 2, 8, 10 | 3, 8, 11 | 4, 10, 14 |
| 1, 8, 9 | 2, 9, 11 | 3, 9, 10 | 4, 11, 15 |
| 1, 10, 11 | 2, 12, 14 | 3, 12, 15 | |
| 1, 12, 13 | 2, 13, 15 | 3, 13, 14 | |
| 1, 14, 15 | | | |

| | | |
|---|---|---|
| 5, 8, 13 | 6, 8, 14 | 7, 8, 15 |
| 5, 9, 11 | 6, 9, 15 | 7, 9, 14 |
| 5, 10, 15 | 6, 10, 12 | 7, 10, 13 |
| 5, 11, 14 | 6, 11, 13 | 7, 11, 12 |

Сюда следует, понятно, присоединить систему всех позиций, содержащих два одинаковых числа.

Для игры можно взять не только 3 кучки, но и большее число их; мы на этом останавливаться не будем, хотя теория игры и в этих случаях мало отличается от изложенной. Можно было бы изменить правило игры, предположив, что проигравшим считается тот, кто принужден будет взять последний камень. И в этом случае теория в своих существенных чертах не меняется, хотя несколько усложняется, и на ней мы останавливаться не будем.

В о п р о с 14: Одна кучка содержит 7 камешков, другая—25; сколько камешков должна содержать третья кучка, чтобы позиция была „особенной"?

Вопрос 15: Кто выигрывает при начальной позиции 3, 17, 18 (предполагается, что оба партнера играют правильно)?

Вопрос 16: Имеется лишь одна кучка в 25 камешков; каждый из двух партнеров имеет право одним ходом убирать не более 4 камешков. Кто выигрывает—первый или второй?

## Глава VII.

# Ход коня.

### § 1. Определение. История. Предварительные замечания.

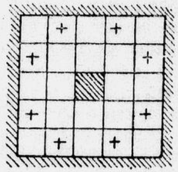
На обыкновенной шахматной доске с 64 клетками в начале игры расположены, как известно 32 фигуры. Все фигуры могут, таким образом, занять половину шахматной доски. Различные авторы, жившие в средине века, использовали последнее обстоятельство для следующей игры: пусть половина доски заполнена шахматными фигурами, расположенными в любом порядке; требуется одним конем в произвольной, но непрерывной последовательности, снять с доски все фигуры.

В шахматной игре „снять" фигуру какой-либо другой—значит поставить последнюю на место первой. Конь, который должен снять все фигуры одну за другой, сам, понятно, в начале игры должен занимать одну из 32-х клеток. Обычным ходом шахматного коня, он должен, начиная со своей клетки, последовательно перебывать во всех остальных (т.-е. в 31-ой) клетках, не становясь более одного раза на одну и ту же клетку, и не переходя на вторую половину доски.



Впоследствии задача эта приняла более общую форму, именно: *конь в произвольной, но непрерывной последовательности должен обойти уже все 64 клетки шахматной доски.* Эта задача в настоящее время известна под названием „хода коня"; ее еще и теперь можно встретить в отделе задач на страницах журналов для юношества. В середине 18-го столетия задача эта была еще мало известна. Даже величайший математик того времени, Леонард Эйлер, ничего не слыхал о ней до тех пор, пока она не была ему предложена для решения на одном заседании научного общества. После этого, она, благодаря Эйлеру, получила широкое распространение, и уже его молодой современник фон-Кемпелен (1734—1804), изобревший шахматный автомат, применил последний для ее решения.

Сам по себе отдельный ход коня, как известно, состоит в том, что конь со своей клетки передвигается (безразлично в какую сторону) либо на две клетки в горизонтальном и затем на одну клетку в вертикальном направлении, либо же, наоборот,—на две клетки в вертикальном и на одну в горизонтальном. Про две клетки, обладающие тем свойством, что от одной из них можно перейти конем к другой, говорят, что они „связаны ходом коня". Максимальное число клеток, связанных ходом коня с данной клеткой, как нетрудно понять, не превосходит 8. Это видно на фиг. 27, где заштрихованная клетка есть данная, т.-е. та, на которой вначале находится конь, а 8 клеток, внутри которых поставлены крестики,—связаны с нею ходом коня. Эта фигура представ-



Фиг. 27.

ляет, конечно, лишь часть всей 64-клеточной шахматной доски. Если конь находится на клетке ближе к краю доски, то других клеток, связанных с первою ходом коня, может оказаться 6, 4 или 3. В том же случае, когда конь поставлен на одну из угловых клеток, то других, связанных с нею ходом коня, окажется лишь две.

На нашей фигуре мы не сделали различия между черными и белыми клетками; в дальнейшем мы их пока не будем различать. Читателю нетрудно понять, что, если на фиг. 27 заштрихованная клетка черная, то все восемь клеток связанные с нею ходом коня, будут белые, и наоборот. Следовательно, конь с каждым ходом меняет цвет клетки: если вначале он находится на белой клетке, то ближайшим ходом перейдет на черную, с черной опять на белую и т. д.

Первую клетку, занимаемую конем, будем называть „начальной“, последнюю — просто „последней“, а обе вместе — „конечными“. Если конечные клетки связаны ходом коня так, что от последней клетки конь одним ходом может вернуться на начальную, то „ход коня“ называют „замкнутым“, в противном случае — „незамкнутым“, или „открытым“.

## § 2. Примеры хода коня.

Число возможных различных „ходов коня“ (т. е. обходов всей доски) до сих пор еще не определено; во всяком случае, оно весьма велико. Поэтому мы ограничимся разбором лишь немногих примеров. Прежде всего разберем в несколько измененном виде задачу, о которой упоминалось в начале предыдущей главы, именно, — задачу обойти конем сначала половину шахматной доски, а затем, перейдя с ее последней клетки на вторую половину, обойти и ее. Такой „двойной ход коня“ изображен на фиг. 28. Решение этой задачи приписывается Эйлеру. Клетки на этой фигуре обозначены числами, указывающими порядок, в каком конь последовательно их проходит; читатель, конечно, замечает, что конь сначала обошел нижнюю половину доски, а затем лишь верхнюю.

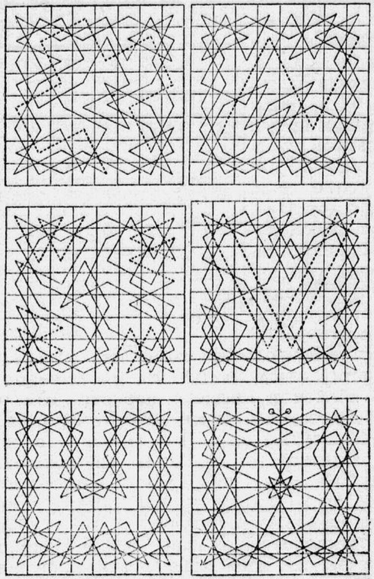


Этот „ход коня“, кроме того, будет „замкнутым“, т. е., в данной задаче возможен переход коня с последней клетки (64) на начальную (1); следовательно, клетки 64 и 1 связаны „ходом коня“. Этим фактом существования *одного* замкнутого хода коня уже доказано, что при любой начальной клетке всегда существует, по крайней мере, один „ход коня“ и притом замкнутый. Например, чтобы получить ход коня, когда за начальную клетку взята клетка 19, достаточно клетки 19—64 обойти в прежнем порядке, как указано на фиг. 28, затем перейти конем с 64-й на 1-ю и, наконец, обойти клетки 1—19 опять в прежней последовательности. Но этим же доказано, что при любой начальной клетке возможны самое меньшее два хода коня, так как каждый замкнутый ход дает возможность получить другой обходом клеток в противоположном направлении. Напр., из данного на фиг. 28 хода коня с направлением (1, 2, 3... 64, 1) можно получить другой ход в противоположном направлении (1, 64, 63... 2, 1).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 37 | 62 | 43 | 56 | 35 | 60 | 41 | 50 |
| 44 | 55 | 36 | 61 | 42 | 49 | 34 | 59 |
| 63 | 38 | 53 | 46 | 57 | 40 | 51 | 48 |
| 54 | 45 | 64 | 39 | 52 | 47 | 58 | 33 |
| 1 | 26 | 15 | 20 | 7 | 32 | 13 | 22 |
| 16 | 19 | 8 | 25 | 14 | 21 | 6 | 31 |
| 27 | 2 | 17 | 10 | 29 | 4 | 23 | 12 |
| 18 | 9 | 28 | 3 | 24 | 11 | 30 | 5 |

Фиг. 28.

Диаграммы „ходов коня" большею частью имеют чрезвычайно запутанную линию; достигнуть полной симметрии при их построении вообще невозможно, что вытекает из сущности самой задачи, хотя любители приложили немало труда для получения более или менее изящных диаграмм, но только



Фиг. 29—34.



некоторым из них удалось достигнуть положительных результатов. Наиболее замечательные примеры такого рода диаграмм представлены на фиг. 29—34, из которых фигура 29 изображает крест, фигура 30—букву N (Napoléon), фигура 31—четырехкратное W, фигура 33—двойное V, похожее на герб, а фигура 33 в целом представляет нечто вроде вазы; наконец, фигура 34, особенно симметричная,—нечто вроде цветка. Все эти ходы коня—замкнутые, только последний—„открытый".

## § 3. Некоторые приемы образования ходов коня.

Познакомим читателя с весьма удобным правилом для получения „ходов коня", часто применяемым на практике.

*Когда конь находится на какой-либо клетке, то ближайшим ходом, как сказано было выше, можно перейти на одну из клеток, связанных с первою ходом коня. Из них выбирают ту, которая связана ходом коня с наименьшим количеством свободных клеток, так как есть опасение, что впоследствии не удастся на нее попасть, и она окажется совсем отрезанной. Для клетки же, связанной ходом коня с большим количеством свободных клеток, имеется, понятно, большая возможность быть впоследствии достигнутой. Если же можно попасть только на такие клетки, которые связаны ходом коня с одинаковым числом других клеток, то безразлично, на какую из них станет конь.*

На практике это правило имеет большое значение, так как даже произвольно начатый „ход коня", когда значительная часть клеток была уже занята без соблюдения этого правила, может быть все же доведен до конца. Пусть, например, нами начат „ход коня", причем уже заняты 40 клеток (фиг. 35) без соблюдения указанного правила. Если при дальнейших отдельных ходах мы будем руководствоваться данным правилом, то все-таки нам удастся закончить „ход коня" так, как показано на фиг. 36.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 21 | 34 | 9 | | 19 | 32 | 7 |
| 35 | 10 | | 20 | 33 | 8 | | 18 |
| 22 | | | | | 6 | 31 | |
| 11 | 36 | | | | 17 | | |
| | 23 | | | 40 | | 30 | 5 |
| 37 | 12 | 25 | | 27 | | | 16 |
| 24 | | 2 | 39 | 14 | | 4 | 29 |
| 1 | 38 | 13 | 26 | 3 | 28 | 15 | |

Фиг. 35.

Остановимся несколько подробнее на том, как при помощи нашего правила возможно от фиг. 35 перейти к 36; причем, ради простоты, будем обозначать клетки шахматной доски числами фиг.36. Клетка 40, как видно из фиг. 35, есть последняя клетка беспланового движения коня по шахматной доске. Начнем теперь применять наше правило. С клетки 40 конь может перейти на следующие: 41, 43, 45, 59 и 49. Из них клетка 43 имеет три свободных выхода на 42, 44 и 60; клетка 45 также имеет три свободных выхода на 44, 58 и 46; и столько же выходов имеют клетки 59 и 49. Напротив, клетка 41 имеет лишь два открытых выхода, именно: 42 и 43.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 54 | 21 | 34 | 9 | 58 | 19 | 32 | 7 |
| 35 | 10 | 55 | 20 | 33 | 8 | 57 | 18 |
| 22 | 53 | 64 | 59 | 56 | 45 | 6 | 31 |
| 11 | 36 | 49 | 46 | 63 | 60 | 17 | 44 |
| 50 | 23 | 52 | 61 | 40 | 47 | 30 | 5 |
| 37 | 12 | 25 | 48 | 27 | 62 | 43 | 16 |
| 24 | 51 | 2 | 39 | 14 | 41 | 4 | 29 |
| 1 | 38 | 13 | 26 | 3 | 28 | 15 | 42 |

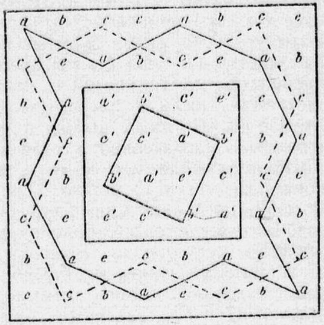
Фиг. 36.



Мы приходим к выводу, что клетка 41 из всех других свободных клеток, связанных ходом коня с клеткой 40, имеет наименьшее число свободных выходов; поэтому, согласно правилу, мы должны перевести коня с клетки 40 на 41. Для следующего отдельного хода коня с клетки 41, приходится рассматривать лишь две возможности: переход на 42 и на 48. Из них клетка 48 имеет пока 4 свободных выхода, именно: на 47, 63, 49 и 51; напротив, клетка 42 имеет только один свободный ход, именно, на 43. Поэтому, теперь конь должен перейти с клетки 41 на клетку 42. Если бы мы этого не сделали, а перевели бы коня с клетки 41 на клетку 48, то впоследствии мы могли бы достигнуть 42, пройдя предварительно 43, но тогда выход с клетки 42 был бы отрезан. Следовательно, клетка 42 должна была бы быть пропущена, или же быть последней в „ходе коня". С клетки 43 можно перейти либо к 44, либо к 60; последние имеют по три свободных выхода. Поэтому, согласно правилу, мы можем из них выбрать какую угодно. Если выберем 44, то затем нам придется занять клетку 45, так как последняя имеет только 2 свободных выхода, между тем, как клетки 47 и 57, связанные ходом коня с клеткой 44, имеют по три таких выхода. Таким образом доводят „ход коня" до конца.

В о п р о с 17. Взяв за начальную клетку левую конечную фиг. 34 и сделав произвольные 36 ходов, продолжить „ход коня", руководствуясь правилом этого параграфа.

Только что изложенный способ позволяет закончить уже начатый „ход коня", и в этом отношении он является весьма ценным. Но он не имеет строгого теоретического обоснования, а поэтому иногда может не привести к цели. Мы займемся теперь двумя другими методами решения интересующей нас задачи. Этими методами нельзя закончить любой начатый „ход коня“, но зато они дают наглядную картину того, как составить с самого начала такой „ход“. Обращаясь к первому методу, мы, прежде всего, представляем себе шахматную доску разделенной на внутренний квадрат с 16-ю клетками и на внешнюю рамку с 48-ю клетками (фиг. 37). Далее, клетки каждой из этих двух



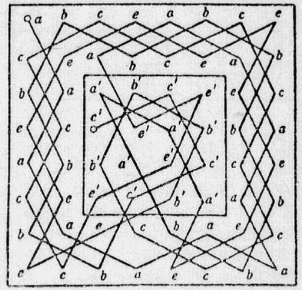
Фиг. 37.

частей разделяем на такие 4 группы (класса), что конь может, начав с любой клетки такого класса, обойти все его клетки. На фиг. 37 мы это разделение клеток представили наглядно; клетки одного и того же класса обозначены одной и той же буквой и начерчены диаграммы некоторых классов. Мы могли бы построить диаграммы всех 8 классов: 4 внутренние (мы их обозначим для краткости: $a'$, $b'$, $c'$, $e'$) по 4 клетки в каждой; 4 внешние ($a$, $b$, $c$, $e$) по 12 клеток в каждой.



*Первый метод заключается в том, что конь проходит последовательно все 8 диаграмм; при этом внутренние и внешние диаграммы чередуются (т. е., конь раньше проходит, например, внутреннюю, с нее переходит на внешнюю, с последней на непройденную внутреннюю, а затем опять на внешнюю и т. д.). Чередование может быть произвольным, но не разрешается переход с диаграммы (напр., $a$) на диаграмму ($a'$), обозначенные одной и той же буквой; следовательно, исключаются следующие переходы: $a - a'$, $b - b'$, $c - c'$ и $e - e'$. Весьма часто встречающийся „ход коня“ получается по схеме $a—e'—c—b'—e—a'—b—e'$ (фиг. 38).*

В только что изложенном методе мы разделили 16 клеток внутреннего квадрата на 4 группы (по 4 клетки в каждой) или, как мы впредь будем говорить, на „четверные ходы“. Два таких четверных хода $b'$ и $c'$ (их диаграммы) имеют форму квадрата, два других ($a'$ и $e'$)—форму ромба.



Фиг. 38.

Мы можем для всей шахматной доски провести такое же подразделение, именно: разделим сперва всю доску на 4 равные части (квадраты) по 16 клеток в каждой, затем каждый квадрат делим на вышеупомянутые четверные ходы. Четыре клетки, принадлежащие к одному и тому же четверному ходу, будем обозначать одной и той же буквой; например, буквой $a$ обозначены (фиг. 39) четыре клетки одного четверного хода, буквой $C$—другого, буквой $E'$—третьего, и т. д. Но для обозначения клеток четверных ходов, имеющих в наших 4 квадратах одинаковое расположение, мы вводим одну и ту же букву, беря в одном случае малую букву ($a$), в другом—большую ($A$), в третьем и четвертом — те же буквы, но со значками ($a'$ и $A'$). Причем, мы обозначили четверные ходы, имеющие форму ромба, гласными буквами ($A$ и $E$), а четверные ходы, имеющие форму квадрата — согласными ($B$ и $C$).

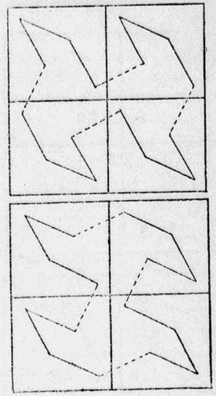
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | E | a | b | c | e |
| C | E | A | B | c | e | a | b |
| B | A | E | C | b | a | e | c |
| E | C | B | A | e | c | b | a |
| a' | b' | c' | e' | A' | B' | C' | E' |
| c' | e' | a' | b' | C' | E' | A' | B' |
| b' | a' | e' | c' | B' | A' | E' | C' |
| e' | c' | b' | a' | E' | C' | B' | A' |

Фиг. 39.

Можно все четверные ходы, обозначенные одной и той же буквой (напр., $A$, $a$, $A'$ и $a'$) соединить в один общий ход в 16 клеток. Например, если начертить ромбы $A$, $a$, $A'$, $a'$, то легко понять, что можно их соединить в один непрерывный ход. Для этого достаточно лишь удалить по одной стороне в каждом ромбе, заменяя удаленную сторону переходом коня с одного ромба на другой; четыре удаленные стороны, как нетрудно убедиться, друг другу параллельны, В каждом ромбе можно, понятно, удалять лишь стороны, обращенные к соседнему квадрату. Так как у каждого ромба имеются только две стороны, прилегающие к квадратам, то



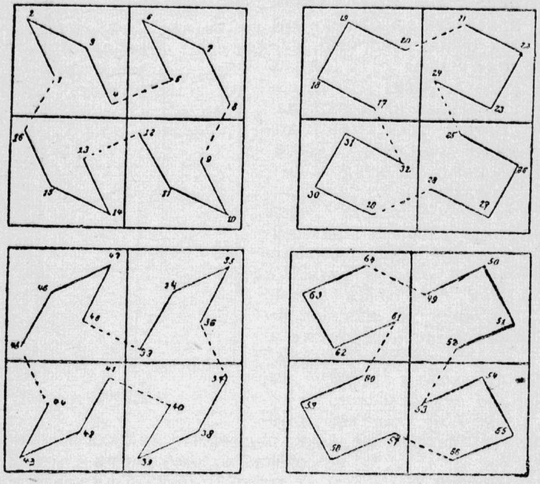
четверные ходы $A$, $a$, $A'$, $a'$, могут быть соединены в один ход двояким образом, как видно на фиг. 40.



Фиг. 40.

Таким образом, мы имеем два хода $A$ (ради краткости выражения мы так будем говорить), два хода $B$, два хода $C$ и два хода $E$. Ходы $A$ и $E$, составленные из ромбов, называют „гласными“ ходами; ходы $B$ и $C$, составленные из квадратов—„согласными“. *Для получения полного „хода коня“ следует лишь связать 4 хода, именно: один A, один B, один C и один E. Причем нужно следить за тем, чтобы не было непосредственного перехода от гласного хода к гласному же, или от согласного к согласному*, так как читатель на фиг. 39 может видеть, что ни одна из клеток $A$, $a$, $A'$, $a'$ не связана ходом коня ни с одной клеткой $E$, $e$, $E'$ и $e'$; то же относится и к клеткам согласных ходов. Напротив, от гласного хода можно перейти конем к согласному, и можно наши 4 хода, содержащие по 16 клеток, соединить в порядке $A—B—E—C$ друг с другом. Но в таком случае получается „ход коня“. Фиг. 41 показывает, как получается в данном случае полный „ход коня“; причем числа указывают порядок отдельных ходов коня.

Само собою разумеется, что задача о „ходе коня“ может быть задана и на другой какой-либо доске, не шахматной: на прямоугольной или иной формы, хотя в этих случаях задача может оказаться и неразрешимой. Но на таких задачах мы здесь останавливаться не будем.



Фиг. 41.

## § 4. Магические ходы коня.

Особенно интересны те формы полного хода коня, когда суммы чисел, указывающих в каком порядке конь переходит с одной клетки на другую, и расположенные в одной горизонтальной строке или в одном вертикальном столбце, равны одному



и тому же числу. Такие „ходы коня", обладающие свойствами „магических" квадратов (которые мы рассмотрим в следующей главе), называют „магическими" или „полумагическими". Такими ходами коня много занимались любители, и ими были подобраны многие интересные случаи. Как сказано выше, суммы чисел, находящихся в одной и той же строке или одном и том же столбце, равны одному и тому же числу; легко подсчитать, что суммы эти должны быть равны 260.

Данная на фиг. 42 схема магического *) хода коня составлена русским теоретиком шахмат

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 11 | 24 | 63 | 14 | 37 | 26 | 35 | 260 |
| 23 | 62 | 51 | 12 | 25 | 34 | 15 | 38 | 260 |
| 10 | 49 | 64 | 21 | 40 | 13 | 36 | 27 | 260 |
| 61 | 22 | 9 | 52 | 33 | 28 | 39 | 16 | 260 |
| 48 | 7 | 60 | 1 | 20 | 41 | 54 | 29 | 260 |
| 59 | 4 | 45 | 8 | 53 | 32 | 17 | 42 | 260 |
| 6 | 47 | 2 | 57 | 44 | 19 | 30 | 55 | 260 |
| 3 | 58 | 5 | 46 | 31 | 56 | 43 | 18 | 260 |
| 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | |

Фиг. 42.

Янишем. Этот „ход коня" замечателен не только тем, что удовлетворяет обычному условию маги-

*) Собственно говоря, слово „магический" здесь не вполне подходит, так как сумма чисел диагоналей не равна сумме чисел, находящихся, напр., в одной строке. „Магические" ходы коня в полном смысле слова, повидимому, невозможны,—по крайней мере, до сих пор они никем не были составлены.

ческого хода коня, но и тем, что является замкнутым. Кроме того, он симметричен, так как при повороте на 180 градусов, первая половина доски (1 — 32) переходит во вторую (32 — 64). Замечательно то, что он составлен из двух замкнутых ходов по 32 клетки в каждом, так как клетка 1 связана ходом коня с 32, а клетка 33—с 64.

Глава VIII.

# Магические квадраты.

## § 1. Введение.

На своей известной гравюре „Меланхолия“ Альбрехт Дюрер, выдающийся математик и автор труда по геометрии, в аллегорической фигуре изображает искания и стремления в физико-математических науках. Эта женская фигура, сидящая в пытливой задумчивости, окружена геометрическими телами (шар, многогранник) и разнообразными приборами для измерения, взвешивания и т. д. На этой гравюре фигурирует не только геометрия, но и арифметика. Над головой женской фигуры находится числовой квадрат, который воспроизведен отдельно на фиг. 43. В его 16 клетках помещены числа от 1 до 16; из них мы два средних числа нижней строки напечатали жирным шрифтом, так как взятые вместе они изображают год, 1514-й, в который появилась гравюра. Эти 16 чисел расположены в квадрате так, что сумма чисел любого горизонтального ряда или „строки“, напр., третьего: 9, 6, 7, 12—равна всегда 34. Это число получится также, если сложить числа какого либо вертикального ряда или

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | **15** | **14** | 1 |

Фиг. 43.



„столбца“ — напр., первого слева: 16, 5, 9, 4. Точно так же сумма чисел каждой диагонали, именно, 16, 10, 7, 1 и 13, 11, 6, 4—равна 34.—*Числовой квадрат, обладающий тем свойством, что сумма чисел каждого горизонтального, вертикального и диагонального ряда равна одному и тому же числу, называют „магическим квадратом“*. Конечно, предполагается, что числа, находящиеся в клетках магического квадрата, образуют последовательный ряд идущих друг за другом целых чисел. Напр., в квадрате фиг. 43—1, 2, 3, . . . 16. Причем предполагается, что этот ряд всегда начинается с единицы, если предварительно не указывается, что он должен начаться с другого числа. Часто постоянная сумма получается не только от сложения чисел, находящихся в одном и том же ряду квадрата, но от сложения чисел того же квадрата, подобранных иным образом. Напр., в квадрате Дюрера, разделенном на 4 квадрата, содержащих по 4 клетки, сумма чисел каждого квадрата также равна 34; сумма чисел квадрата, содержашего 4 внутренние клетки, также равна 34; сумма 4 чисел, находящихся в углах квадрата (16, 13, 4, 1) опять равна 34; далее, сумма чисел квадрата четверного хода 5, 2, 12, 25 и четверного хода 3, 8, 14, 9—тоже равна 34; далее тому же числу равны суммы чисел ромбов четверного хода 16, 11, 1, 6 и 13, 10, 4, 7 и т. д. Отсюда видно, что магический квадрат обладает замечательными свойствами, чем объясняется его древняя связь с мистикой и суевериями. О связи „магических квадратов“ с обычаями и верованиями людей того времени, мы поговорим еще в параграфе 5 этой главы.

## § 2. Девятиклеточный магический квадрат.

Шестнадцатиклеточный квадрат Дюрера не является примером самого простого магического квадрата, так как имеются такие квадраты, содержащие и $3 \times 3 = 9$ клеток. Читатель сам понимает, что мы должны исключить из рассмотрения магические квадраты с $2 \times 2 = 4$ клетками. Постараемся теперь составить магический квадрат с 9-ю клетками, т. е., разместить числа 1, 2, . . . . 9 в клетках фиг. 45 так, чтобы сумма каждого из горизонтальных, вертикальных и диагональных рядов была постоянно равна одному и тому же числу. Как велика должна быть эта сумма? — вот вопрос, на который, прежде всего, следует ответить. Мы получим ответ скорее, если все 9 чисел дважды подпишем одно под другим, но в противоположных направлениях, т. е. напишем так:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

Фиг. 44.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1
\end{array}
$$

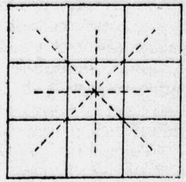
Так как сумма каждой пары чисел, подписанных одно под другим равна 10, то сумма чисел обоих рядов равна 90, а каждого — 45. Итак, сумма первых девяти целых чисел равна 45. Но в нашем девятиклеточном квадрате всего три строки (или три столбца), поэтому сумма чисел всех трех строк (или трех столбцов) равна 45. Следовательно, на каждую строку или на каждый столбец приходится 15. Значит, постоянная сумма, которую нам надо было определить, равна 15.

Теперь нам предстоит **9** чисел от 1 до 9 разместить в квадрате так, чтобы каждый из 8-ми рядов — 3 строк, 3 столбцов и 2 диагоналей — имели эту постоянную сумму 15. Легко убедиться, что можно составить следующие 8 и только 8 сумм по 15 из чисел 1—9, из которых каждая содержит по 3 слагаемых:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1, 5, 9; | 1, 6, 8; | 2, 4, 9; | 2, 5, 8; |
| 2, 6, 7; | 3, 4, 8; | 3, 5, 7; | 4, 5, 6; |



В эти 8 „троек" чаще всех других чисел входит число 5, именно 4 раза: поэтому не трудно понять, что число 5 необходимо должно быть помещено во внутренней клетке искомого магического квадрата, так как эта клетка входит в 4 ряда (фиг. 45), обладающих тем свойством, что сумма чисел каждого ряда равна определенному числу — 15. Далее, эти 8 троек заключают в себе каждое четное число (2, 4, 6, 8) три раза, а каждое нечетное (1, 3, 7, 9) — по два раза. Но так как угловые клетки магического квадрата принадлежат одновременно 3 рядам — строке, столбцу и диагонали (сумма чисел каждого ряда равна 15), то в них должны быть упомянутые 4 четных числа. Наоборот, 4 средние клетки двух внешних строк и двух внешних столбцов должны быть заняты нечетными числами. Если предположить, что верхняя левая угловая клетка занята числом 2, то в нижней правой угловой клетке придется поместить число 8, иначе сумма чисел диагонали не будет равна 15. Для двух других угловых клеток остаются, таким образом, лишь числа 4 и 6. Предположим, что мы заняли числом 4 верхнюю правую угловую клетку; тогда нам придется число 6 поместить в нижней левой угловой клетке. В таком случае остается оставшиеся нечетные числа 1, 3, 7 и 9 разместить по средним клеткам, имея в виду, что сумма чисел каждого столбца или строки должна быть равна 15. Получаем магический квадрат, изображенный на фигуре 46.



Фиг. 45.

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 9 | 4 |
| 7 | 5 | 3 |
| 6 | 1 | 8 |

Фиг. 46.

Но нетрудно понять, что наша задача имеет 8 решений: каждое из 4-х чисел 2, 4, 6, 8 может занять верхнюю левую угловую клетку (напр., 6); число же нижней правой угловой клетки зависит, конечно, от выбора числа для верхней левой угловой ($15 - 5 - 6 = 4$); но при определенном выборе последнего числа (6), для двух других угловых клеток остаются остальные два четные числа (2 и 8), которые мы можем разместить в них двояким образом (либо 2 в нижней левой и 8 в верхней правой, либо наоборот). Таким образом для каждого четного числа 2, 4, 6, 8, помещенного в верхнюю левую клетку, имеются два решения; следовательно решений всего имеется 8. Из магического квадрата фиг. 46 можно следующим образом получить остальные 7 решений. Повернув этот квадрат на каждый из углов 90°, 180°, 270°, получим прежде всего три решения, которые вместе с квадратом фиг. 46 составят 4 решения. Отображением в зеркале этих 4 квадратов получим остальные 4 решения. Но мы впредь квадраты, полученные путем вращения и отображения данного квадрата, не будем считать отличными от последнего; таким образом, мы можем в указанном смысле считать, что существует только один магический квадрат с числами 1, 2, . . . . 9.

Вопрос 18. В вилле Албани, в Риме, имеется вделанный в мрамор магический квадрат с $9 \times 9$ клетками, заполненными числами от 1 до 81. Чему равна сумма чисел, находящихся в одном ряду?

## § 3. Общий метод образования магического квадрата с нечетным числом клеток.

Квадраты более чем с 4 клетками могут быть всегда заполнены соответствующими числами так, чтобы из них образовались магические квадраты.



Задача образования магических квадратов значительно легче для квадратов с нечетным, чем с четным числом клеток. Поэтому мы прежде всего займемся изложением общего приема образования магических квадратов с нечетным числом клеток. С сущностью этого приема легче всего ознакомиться на частном примере, именно, на квадрате с $5 \times 5 = 25$ клетками. 25 чисел, которые должны быть размещены по 25 клеткам этого квадрата, мы запишем следующим образом:

Схема.

$$
\begin{array}{lll}
1 = \phantom{1\times 5+{}}1 & 2 = \phantom{1\times 5+{}}2 & 3 = \phantom{1\times 5+{}}3 \\
6 = 1 \times 5 + 1 & 7 = 1 \times 5 + 2 & 8 = 1 \times 5 + 3 \\
11 = 2 \times 5 + 1 & 12 = 2 \times 5 + 2 & 13 = 2 \times 5 + 3 \\
16 = 3 \times 5 + 1 & 17 = 3 \times 5 + 2 & 18 = 3 \times 5 + 3 \\
21 = 4 \times 5 + 1 & 22 = 4 \times 5 + 2 & 23 = 4 \times 5 + 3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
4 = \phantom{1\times 5+{}}4 & 5 = \phantom{1\times 5+{}}5 \\
9 = 1 \times 5 + 4 & 10 = 1 \times 5 + 5 \\
14 = 2 \times 5 + 4 & 15 = 2 \times 5 + 5 \\
19 = 3 \times 5 + 4 & 20 = 3 \times 5 + 5 \\
24 = 4 \times 5 + 4 & 25 = 4 \times 5 + 5
\end{array}
$$

В этой схеме одно под другим стоят те числа, которые, при делении на 5, имеют один и тот же остаток: в первом столбце — имеющие остаток 1, во втором — 2 и т. д.; наконец, в последнем — имеющие остаток 0. Числа, имеющие при делении на 5 остаток 0 (т.-е. делящиеся нацело на 5), мы по причинам, которые будут указаны позднее, изобразили как числа с остатком 5. В одних и тех же *строках* нашей схемы находятся числа, имеющие при делении на 5 одно и то же частное: в первых строках—числа меньшие 5 и само число 5 (первое их слагаемое нуль, как говорят, кратно 5, ибо, напр., $2 = 0 \times 5 + 2$); во вторых — числа, имеющие частное 1 (первое их слагаемое одно-кратно 5);

в третьих — имеющие частное 2 (первое их слагаемое двух-кратно 5); в четвертых -имеющие частное 3 (первое их слагаемое трех-кратно 5); наконец, в пятых — имеющие частное 4 (первое их слагаемое четырех-кратно пяти). Полагая, что не произойдет недоразумений, мы в дальнейшем будем употреблять слова „схема", „число с остатком четыре" (одно из чисел из 4 столбца) и „трех-кратное 5-ти".

Прежде чем перейти к образованию магического квадрата, постараемся решить следующую весьма легкую задачу. Положим, что надо разместить наши 25 чисел в 25 клетках квадрата так, чтобы суммы чисел горизонтальных рядов (т.-е. строк) были бы равны одному и тому же числу. Последнее число, как нетрудно понять, должно быть равно $\frac{25 \times 25}{2 \times 5} = 65$ (см. стр. 90). Эта частичная задача легче нашей основной, потому что в ней нет требования относительно сумм чисел вертикальных и диагональных рядов: ведь, в сущности она заключается в разделении 25 чисел на 5 групп по пяти чисел в каждой (нас не интересует порядок чисел в каждой группе); причем сумма чисел каждой такой группы должна равняться одному и тому же числу (65). Такое подразделение мы получим, если из вышеприведенной „схемы" будем отбирать по 5 чисел так, чтобы любые два числа такой „пятерки" *не принадлежали одновременно ни одной и той же строке и ни одному и тому же столбцу.* В самом деле, в сумму любых, таким образом, выбранных пяти чисел, находящихся в различных столбцах, входят все остатки 1, 2, 3, 4 и 5 и лишь по одному разу; но так как все эти пять чисел находятся в различных строках, то в эту сумму кроме остатков 1, 2, 3, 4, 5 входят: нуль-кратное пяти, одно-кратное пяти, двух-кратное пяти, трех-кратное пяти и четырех-кратное пяти. Для примера возьмем пять чисел находящихся в диагональном ряду нашей схемы; эти числа принадлежат различным строкам и различным столбцам схемы, поэтому они образуют группу с постоянной суммой (65):



$$
\begin{aligned}
1 &= 1\\
7 &= 1 \times 5 + 2\\
13 &= 2 \times 5 + 3\\
19 &= 3 \times 5 + 4\\
25 &= 4 \times 5 + 5
\end{aligned}
$$

В эту группу 5 чисел входят все 5 „кратных" (нуль-кратное, одно-кратное и т. д.) и 5 „остатков". Легко понять, что таких групп имеется только 5, так как и чисел имеется всего 25. В сумму чисел каждой группы входят по одному разу каждое „кратное" и каждый „остаток"; поэтому-то суммы чисел всех пяти групп равны между собой. Эта сумма должна быть равна сумме всех „кратных" и всех „остатков", именно $(1\times5+2\times5+3\times5+4\times5)+$ $+(1+2+3+4+5)$; в результате получается, конечно, число 65.

Примером второй такой группы может служить следующая:

$$
\begin{aligned}
2 &= 2\\
8 &= 1 \times 5 + 3\\
14 &= 2 \times 5 + 4\\
20 &= 3 \times 5 + 5\\
21 &= 4 \times 5 + 1
\end{aligned}
$$

Эти числа опять содержат по одному разу каждое „кратное" и по одному разу каждый „остаток", поэтому и их сумма равна 65.

Вот еще одна группа:

$$
\begin{aligned}
3 &= 3\\
10 &= 1 \times 5 + 5\\
12 &= 2 \times 5 + 2\\
16 &= 3 \times 5 + 1\\
24 &= 4 \times 5 + 4
\end{aligned}
$$

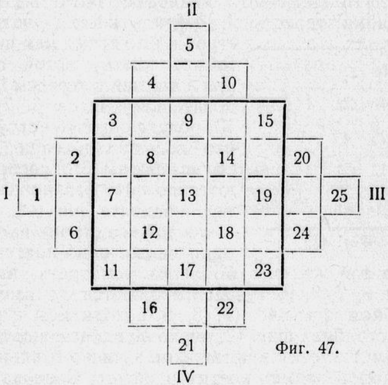
И эта группа содержит все „кратные“ и все „остатки“ лишь по одному разу; другими словами все пять чисел этой группы принадлежат различным столбцам и различным строкам схемы. Мы можем легко получить из оставшихся 10 чисел еще две такие группы. Если мы выпишем пять чисел каждой группы в одну строку, то получим следующее подразделение 25 чисел на 5 групп, удовлетворящих выше поставленному условию:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 13 | 19 | 25 |
| 2 | 8 | 14 | 20 | 21 |
| 3 | 10 | 12 | 16 | 24 |
| 4 | 6 | 15 | 18 | 22 |
| 5 | 9 | 11 | 17 | 23 |

Мы получили квадрат, удовлетворяющий относительно горизонтальных рядов требованию магического квадрата, — постоянству сумм, так как сумма чисел каждой строки равна одному и тому же числу (65). Это постоянство суммы каждой строки квадрата вытекает из того, что в каждой из них находятся числа, из которых любые два не принадлежат одновременно ни одному горизонтальному или вертикальному ряду „схемы“. Суммы же чисел каждого из столбцов квадрата не удовлетворяют основному требованию магического квадрата. Путем перестановки чисел каждой строки, навряд ли нам удастся удовлетворить этому требованию, так как при расположении чисел каждой из 5 групп, мы никакой системы не придерживались. Можно было бы, конечно, образовать квадрат, *столбцы* которого удовлетворяли бы условию постоянства сумм, подобно тому, как мы только что образовали квадрат, *строки* которого ему удовлетворяют. Но в этом нет надобности, тем более, что поворотом уже полученного квадрата на 90°, получается такой квадрат. Мы приблизимся к



нашей цели — получению магического квадрата, если постараемся расположить все 25 чисел так, чтобы не только в каждую строку, но также и в каждый столбец одновременно входили все „остатки“ и все „кратные“. Для этого впишем 25 чисел нашей схемы в 25-ти клеточный квадрат, снабженный еще четырьмя „террасами“, как показано на фиг. 47.




Фиг. 47.

Числа первой строки нашей схемы (1, 2, 3, 4, 5) заполняют первую диагональ, идущую вверх слева направо; числа второй строки (6, 7... 10) заполняют в том же направлении диагональ, параллельную первой, и т. д. *Сущность предлагаемого нами приема заключается в том, что каждая терраса вдвигается в квадрат так, чтобы ее основание совпало с противоположной стороной квадрата.* Тогда числа, вписанные в террасы, заполняют пустые клетки квадрата. Получаемый таким способом квадрат (фиг. 48) и есть искомый магический.

Строки и столбцы квадрата, образованного указанным приемом, удовлетворяют нашему основному условию, так как каждая строка и каждый столбец квадрата (фиг. 48) содержат все „остатки“ и все „кратные“ и притом только по одному разу. Если обратимся, напр., к числам 6, 7, 8, 9, 10 (фиг. 47), то увидим, что 7, 8, 9 находятся в верхних 3 строках 25-ти-клеточного квадрата, число же 6, при вдвигании терассы I, займет клетку четвертой строки, в то время как число 10 займет клетку пятой строки, при вдвигании терассы II. Следовательно, числа 6, 7, 8, 9, 10, обладающие тем свойством, что все они в нашей схеме „одно-кратны 5“, распределяются по пяти различным строкам квадрата фиг. 48. Значит в каждой его строке находится одно число, одно-кратное 5.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 16 | 9 | 22 | 15 |
| 20 | 8 | 21 | 14 | 2 |
| 7 | 25 | 13 | 1 | 19 |
| 24 | 12 | 5 | 18 | 6 |
| 11 | 4 | 17 | 10 | 23 |

Фиг. 48.

Из той же фиг. 47 легко усмотреть, что пять чисел 6, 7, 8, 9, 10 распределяются по различным столбцам фиг. 48 (7, 8, 9 находились в первых трех столбцах фиг. 47, число 10 вдвиганием террасы II займет клетку в четвертом, а число 6 вдвиганием террасы I займет клетку в пятом). Следовательно, каждый столбец также содержит по одному однократному пяти числу. Понятно, что можно применить те же рассуждения для другого какого-либо ряда фиг. 47, напр., для ряда 21, 22, 23, 24, 25, содержащему все числа нашей схемы, четырехкратные 5. Так же, как и в предыдущем случае, легко убедиться, что эти 5 чисел распределяются по 5 разным строкам и по 5 разным столбцам квадрата фиг. 48. Следовательно, каждая строка и каждый столбец этого квадрата содержат лишь по одному числу, четырех-кратному 5. Вообще,



таким же образом можно убедиться, что в каждую строку и в каждый столбец нашего квадрата каждое „кратное“ входит только по одному разу. Но нетрудно понять, что это правильно также и для „остатков“. Напр., ряд чисел 2, 7, 12, 17, 22, составляющих диагональ фиг. 47, идущую вниз слева направо, посредством вдвиганий соответствующих террас, распределятся по 5 различным строкам и 5 различным столбцам квадрата фиг. 48. Но так как числа 2, 7, 12, 17, 22 имеют одинаковые „остатки“ 2, то опять-таки в каждой строке и в каждом столбце квадрата фиг. 48 должно находиться по одному — и только одному — числу с „остатком“ 2. Это рассуждение правильно не только для „остатка“ 2, но и для любого другого. Этим доказано, что каждая строка и каждый столбец квадрата фиг. 48 содержат лишь по одному разу каждый „остаток“ и каждое „кратное“. Следовательно, суммы чисел каждой строки и каждого столбца равны одному и тому же числу, именно: 65.

Остается проверить, образуют ли обе диагонали ту же сумму. Одна из них содержит числа 3, 8, 13, 18, 23 (фиг. 48), эти числа имеют различную „кратность“. Следовательно, в диагональ входит по одному числу каждой „кратности“. Но эти числа имеют одинаковые остатки, именно 3. Сумма же всех остатков равна такому же числу, именно: $1+2+3+4+5=15$, какому равно произведение среднего *) числа 3 на 5. Поэтому сумма чисел этой диагонали также равна 65. Другая диагональ (11, 12, 13, 14, 15) содержит, верно, все остатки, но зато ее числа, принадлежащие к одной и той

*) Это справедливо лишь для числа 5 или для другого *нечетного* числа. По этой и по другим причинам, которые легко понять, но которых мы здесь касаться не будем, изложенный способ образования квадрата верен лишь для нечетного квадрата.

же строке „схемы“, имеют одинаковую „кратность“. Но их „кратность“ есть среднее из всех „кратных“, поэтому сумма чисел второй диагонали также равна 65 ($1+2+3+4+5=15$; $(2\times5)\times5=50$; $15+50=65$). Таким образом квадрат фигуры 48 обладает всеми свойствами магического квадрата.

Вопрос 19: Составьте по этому же способу магический квадрат из 49 клеток.

## § 4. Квадраты с четным числом клеток.

Образование магических квадратов с четным числом клеток значительно труднее, чем с нечетным числом клеток. Поэтому, мы здесь ограничимся более простым случаем, когда число клеток в каждом ряду не только четно, но делится без остатка на 4. Следовательно, мы разберем лишь те магические квадраты, у которых число клеток в каждом ряду равно 4, 8, 12, 16,.... В качестве примера разберем квадрат с $8\times8$ (64) клетками. Прежде всего впишем в клетки квадрата числа от 1 до 64 в их натуральном порядке, как показано на фиг. 49. Каждой клетке (или каждому числу) сопоставим „противолежащую“ („противолежащее“) следующим образом: напр., третьей клетке четвертого столбца слева, в которой находится число 20, соответствует, как „противолежащая“ — третья клетка *снизу* четвертого столбца *справа*—в этой клетке находится число 45. Сумма чисел, находящихся в этих двух клетках, равна 65; вообще, сумма любой пары „противолежащих“ чисел равна тому же числу (65). В самом деле, в двух „противолежащих“ клетках находятся числа, одинаково удаленные от концов ряда 1, 2... 62, 63, 64; ведь, 20 настолько удалено от 1, насколько 45 от 64. Если все числа ряда 1, 2, 3... 62, 63, 64 выписать



в одну строку и подписать над ней этот же ряд в обратном порядке:

1, 2, 3,.... 62, 63, 64
64, 63, 62,.... 3, 2, 1,

то нетрудно, как и раньше (стр. 90) убедиться, что сумма чисел, равностоящих от концов ряда, всегда равна 65.

Число 1 „противолежит“ на фиг. 49 числу 64; число 10—числу 55; и т. д.; вообще, если число находится в том же диагональном ряду, что и число 1 и 10, то „противолежащее“ ему число находится в том же ряду. Это верно и для второго диагонального ряда, именно: число 8 „противолежит“ числу 57; 15—числу 50 и т. д. Поэтому 8 чисел, находящихся в одной и той же диагонали, делятся на 4 пары „противолежащих“ чисел. Но сумма чисел такой пары, как мы видели, равна 65, поэтому, сумма 8 чисел каждой диагонали равна $65\times4=260$. Читателю нетрудно вычислить, что последнему числу должна быть равна сумма каждого ряда (строки, столбца и диагонали) искомого магического квадрата. Итак, диагонали при натуральном расположении чисел фиг. 49 уже удовлетворяют основному условию магических квадратов. Читатель должен был это предвидеть, так как, если (фиг. 49) наименьшее число (1) сложить с наи-

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

Фиг. 49.

большим (64), десятое по величине сначала сложить с десятым по величине с конца, и т. д., то в каждом случае получается такое среднее значение (65), что в результате сложения этих пар получается постоянное число (260).

Однако *строки* и *столбцы* фиг. 49 не удовлетворяют основному требованию магических квадратов: сумма чисел первой строки значительно меньше, а сумма чисел последней значительно больше постоянной суммы чисел каждого ряда искомого квадрата. Но мы можем суммы чисел первой и последней строк уравнять, приняв во внимание, что первая сумма настолько меньше требуемой $65 \times 4 = 260$, насколько вторая большее ее (сумма чисел этих двух строк равна $65 \times 8 = 260 \times 2$, так как они содержат 8 пар „противолежащих" чисел. Легко понять, что разность между каким-либо числом последней строки и находящимся над ним числом первой строки, постоянно равна 56. Следовательно, суммы этих строк сравняются, если мы четыре числа первой строки заменим четырьмя находящимися под ними числами последней строки; напр,. заменой 1, 2, 3, 4 числами 57, 58, 59, 60 или 1, 2, 7, 8 числами 57, 58, 63, 64. После такой замены, сумма каждой строки (1 и 8) будет равна 260. В подобной же зависимости находятся вторая и предпоследняя строки, и суммы этих строк можно уравнять указанным образом, так что каждая сумма в конце концов будет равна 260. То же относится к любой паре строк, находящихся на одинаковом расстоянии от крайних, поэтому мы соответствующими заменами можем получить квадрат, все 8 строк которого удовлетворяют основному требованию магических квадратов. Но этому требованию не будут удовлетворять столбцы и, вообще говоря, диагонали, так как последние, удовлетворяя ему вначале (см. выше), при происшедших перестановках могли



измениться и уже перестать удовлетворять этому требованию.

Сумма чисел, находящихся в каждом столбце, при всех изложенных перестановках не меняется, остается неизменной, так как приэтом каждое число остается в своем же столбце, хотя порядок чисел последнего изменяется. Мы можем теперь по отношению к столбцам применить те же рассуждения, какие были применены выше по отношению к строкам, и убедиться, что можно уравнять суммы, напр., первого и последнего столбцов путем взаимной замены четырех чисел первого четырьмя числами последнего. В результате таких замен, сумма чисел каждого столбца окажется равной 260, а сумма чисел каждой строки, рассматриваемой, как целое, не изменится, так как каждое число останется в своей же строке. Предположим, что в результате первых перестановок (чисел строк) число 1 заняло клетку числа 57, в результате же вторых перестановок (чисел столбцов) число 1 с клетки 57 очутится в клетке 64; таким образом, в конечном итоге число 1 перейдет с своей начальной клетки в „противолежащую". Этот пример мы привели не потому, что намерены проследить последовательные положения каждого числа при всех перестановках, а с целью показать, что после них каждое число может быть переведено в клетку, противолежащую той, которую оно занимало вначале. С другой стороны, мы знаем, что при перестановках происходит следующее: половина чисел, напр., первой строки переводится в последнюю строку, а из последней стоящие под ними числа—в освободившиеся клетки первой. Но это не значит, что перемещаемое число последней строки должно занять освободившееся место первой строки, стоящее как раз над ним; нет, оно может занять любое из освободившихся мест. Точно также перемещаемое число первой строки может занять любое из освободившихся мест последней. Кроме того, мы видели, что 1 при дальнейших перемещениях может оказаться в 64-й клетке. Поэтому мы можем четыре числа, напр., 1, 2, 7, 8, первой строки заменить четырьмя числами последней 57, 58, 63, 64, но 1—не числом 57, 2—не 58, 7—не 63, 8—не 64, а 1—числом 64, 2—числом 63, 7—58, 8—57, т. е. каждое из чисел 1, 2, 7, 8 заменяется противолежащим ему числом. Но этой заменой приводятся в надлежащий порядок и соответствующие столбцы. Теперь возникает вопрос—как узнать, какую половину чисел первой строки следует заменить соответствующей половиной последней, какую половину второй заменить соответствующей половиной предпоследней, и т. д., таким образом, чтобы вместе с этим одновременно были произведены необходимые перемещения в столбцах.

Укажем на наиболее простой прием. *Делят весь квадрат фиг. 49 на 16 частей по 4 клетки в каждой, как указано на фиг. 50* (*где a и b обозначают квадраты, содержащие 4 клетки*), *и затем заменяют либо все числа квадратов a, либо все числа квадратов b числами им противолежащими.* Легко понять, что при этом способе половина чисел каждого столбца и каждой строки заменяются противолежащими. Далее, читатель, вероятно, сам заметил, что при перемещениях фиг. 49, в которых меняют свои места лишь противолежащие числа, числа каждой диагонали остаются в ней же, так как в каждой диагонали находятся лишь противолежащие числа. Поэтому суммы чисел диагоналей, которые уже при натуральном расположении чисел 1—64 фиг. 49 были равны одному и тому же числу 260, остаются неизменными и тем самым удо-

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | b | b | a |
| b | a | a | b |
| b | a | a | b |
| a | b | b | a |

Фиг. 50.



влетворяют после перемещений фиг. 50 попрежнему основному требованию магических квадратов. Таким образом, по указанному выше способу мы получим квадрат, все строки, столбцы и диагонали которого удовлетворяют этому требованию. Если произвести замены в квадратах *a* фиг. 50, то получим магический квадрат, изображенный на фиг. 51.

Если число клеток каждого ряда квадрата не делится без остатка на 4, то общее число его клеток не делится на 16; поэтому разделение квадрата на 16 частей, как на фигуре 50, невозможно. Поэтому наш способ составления магического квадрата, напр., для квадрата с $10 \times 10 = 100$ клетками более не применим. Но мы на этом и ему подобных случаях останавливаться не будем, так как приемы их составления весьма сложны.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 64 | 63 | 3 | 4 | 5 | 6 | 58 | 57 |
| 56 | 55 | 11 | 12 | 13 | 14 | 50 | 49 |
| 17 | 18 | 46 | 45 | 44 | 43 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 38 | 37 | 36 | 35 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 30 | 29 | 28 | 27 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 22 | 21 | 20 | 19 | 47 | 48 |
| 16 | 15 | 51 | 52 | 53 | 54 | 10 | 9 |
| 8 | 7 | 59 | 60 | 61 | 62 | 2 | 1 |

Фиг. 51.

Вопрос 20: Составить магический квадрат с $12 \times 12 = 144$ клетками.

## § 5. Магические квадраты на амулетах.

В конце § 1 было сказано, что появление магических квадратов тесно связано с суевериями и предрассудками. Эта связь и объясняет происхождение названия „магический“. Остановимся на этом несколько подробней.

Как известно, в 16 и 17 столетиях имела широкое распространение так-называемая „астрология"— мнимая наука, основанная на том суеверии, что все события на Земле и судьбы людей находятся в зависимости от положения звезд, особенно планет; по ним даже пытались предсказывать события и будущее человека. Астрологи обожествляли планеты и давали им имена наиболее популярных в древности богов. В докоперниковой системе насчитывалось семь планет, именно: Луна, Меркурий, Венера, Солнце, Марс, Юпитер, Сатурн. Между этими семью планетами с одной стороны, и магическими квадратами с другой, астрологи установили тесную связь: к Сатурну, наиболее отдаленной планете, они отнесли магический квадрат с наивозможно меньшим числом клеток, именно, с девятью; поэтому квадрат, изображенный на фиг. 46, прежде часто называли „Tabula Saturni"—таблицей Сатурна. Соответственно этому Юпитеру, планете ближайшей к Сатурну, соответствует магический квадрат с 16 клетками, как ближайший к квадрату с 9-ю клетками, и т. д. В результате получается следующая таблица, устанавливающая связь между планетами и магическими квадратами:

| Планета. | Магический квадрат. | |
|---|---|---|
| | Число клеток. | Сумма чисел ряда. |
| Сатурн . . | $3 \times 3 = 9$ | 15 |
| Юпитер . . | $4 \times 4 = 16$ | 34 |
| Марс . . . | $5 \times 5 = 25$ | 65 |
| Солнце . . | $6 \times 6 = 36$ | 111 |
| Венера . . | $7 \times 7 = 49$ | 175 |
| Меркурий . | $8 \times 8 = 64$ | 260 |
| Луна . . . | $9 \times 9 = 81$ | 369 |



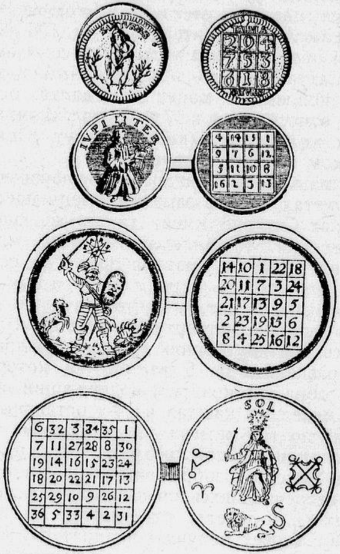
Эти магические квадраты наносились на амулеты, так что каждому из них приписывали свойства бога, имя которого носила планета, соответствующая нанесенному на этот амулет квадрату. По квадрату, находящемуся на амулете, последнему давали и название: напр., амулет с квадратом из 16 клеток называли амулетом Юпитера. На стр. 108 даны изображения обеих сторон четырех из семи амулетов. Амулет Сатурна, здесь изображенный, хранится в Венской коллекции монет и медалей, остальные амулеты, относящиеся к 17 и 18 столетиям, хранятся в других коллекциях (напр., амулет Юпитера—в Берлинском собрании монет).

Про магические квадраты, изображенные на этих амулетах, можно заметить следующее:

Квадрат Сатурна имеет такую же форму, как и квадрат фиг. 46; квадрат Юпитера можно получить из квадрата Дюрера (фиг. 43), если в последнем переставить строки в обратном порядке (т.-е., первую заменить четвертой, вторую—третьей, третью—второй, четвертую—первой) и затем переставить два внутренних столбца; квадрат Марса можно разделить на 5 частей, из которых внутренняя образует квадрат, содержащий все 13 нечетных чисел, а каждая из 4-х остальных частей содержит по три четных числа, образуя треугольник у одной из вершин квадрата. Числа на квадрате амулета Венеры изображены в древне-еврейских знаках, встречающихся очень часто на всякого рода амулетах *); читатель, ответивший на вопрос 19 (стр. 100), может получить квадрат амулета Марса, если полученный им квадрат он повернет на $90^0$ по направлению движения часовой стрелки и затем заменит числа древне-еврейскими обозначениями.

*) Но в противоположность обычному способу древне-еврейского письма, десятки стоят влево (не вправо) от единиц.

Таким же образом получается магический квадрат Луны, именно: составляют магический квадрат с 81 клетками по способу, указанному в § 3, и затем его поворачивают на 90° по направле-




Фиг. 52—59.

нию движения часовой стрелки. Сторону каждого амулета, на которой изображен магический квадрат, называют „обратной" стороной, а другую сторону—



„передней". На передней стороне обычно изображено божество соответствующей планеты и выгравировано его имя. Напр., на передней стороне амулета Сатурна выгравирован бог Сатурн в виде садовника с лопатой—одним из его многочисленных аттрибутов; на амулете Юпитера—изображен Юпитер в задумчивой позе с открытой книгой в руках; Марс—как воин—с мечом и щитом, бог Солнца—как царь, сидящий на троне, с короной и скипетром; Венера—нагая, с длинными развевающимися волосами, стоящая рядом с Купидоном, держит в правой руке стрелу; Меркурий—с его знаменитым жезлом в правой руке, с крыльями на плечах, шляпе и башмаках. Наконец, на передней стороне амулета Луны изображена карта Луны, на которой можно заметить маленькую женскую фигуру—это богиня Луна с полумесяцем в руках: на той же стороне имеется надпись большими буквами L U N A.

Более подробно останавливаться на описании амулетов планет мы не станем. Добавим только следующее: на передней стороне амулета Венеры, кроме самой богини и Купидона, изображены „Весы" и „Телец"; согласно учению астрологов, оба созвездия Зодиака являются „домами" Венеры. То же значение имеют „Овен" и „Скорпион" для амулета Марса (фиг. 56) и „Лев"—для Солнца (фиг. 59).

Следует заметить, что не только на амулетах планет, но и на другого рода амулетах встречаются магические квадраты. Один из них, сравнительно недавно появившийся у индусов-магометан и, по всей вероятности, пользующийся и ныне среди них большой популярностью, предназначен для изгнания злых духов и чертей. Магический квадрат, изображенный на этой фигуре, есть не что иное, как квадрат фиг. 46, повернутый на 180°, числа которого увеличены на 540.

Вторым примером такого амулета может служить документ, свидетельствующий о суевериях, связанных с последней мировой войной. Этот документ представляет собою грамоту на арабском языке, долженствующую служить талисманом против неприятельских пуль. Он найден на поле брани у убитого солдата, по всей вероятности, индуса. На этом талисмане, кроме молитв на арабском языке, здесь нас мало интересующих, имеются три группы чисел, из которых каждая расположена в виде квадрата. Первый из них, содержащий 9 клеток, представляет магический квадрат в полном смысле этого слова; в наших числовых обозначениях он имеет такой вид:

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

Этот квадрат есть зеркальное изображение квадрата фиг. 46. Он может быть получен такжеиз фиг. 46 путем перестановки крайних столбцов. Из обоих 16-ти-клеточных квадратов найденного документа один содержит в каждой строке и в каждом столбце одни и те же 4 числа, именно, самые меньшие четные: 2, 4, 6, 8, играющие особенную роль в числовых суевериях Востока; в этом квадрате сумма чисел каждой строки и каждого столбца также равна одному и тому же числу (20). Этот квадрат, конечно, не магический в строгом смысле этого слова, но он является простейшим примером фигурного расположения чисел. Третий квадрат имеет такую же структуру, как и предыдущий—состоит из 16 клеток, но, вместо четырех чисел, в клетки вписаны 4 арабских имени бога.



Вопрос 21: Увеличить все числа квадрата Дюрера (фиг. 43) или квадрата Юпитера (фиг. 53) на одно и то же число так, чтобы сумма чисел каждой строки, каждого столбца и каждой диагонали была равна 1914—году, имевшему роковое значение в истории человечества.

Как велико это число?

## Глава IX.

# Математические софизмы.

### I. Половина равна целому.

Доказательство: Известно, что

$$a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b).$$

Так как эта формула верна для любых значений $a$ и $b$, то она верна и для $b = a$, или, что то же самое, при замене в ней числа $b$ числом $a$; тогда мы имеем:

$$a^2 - a^2 = (a + a)\ .\ (a - a).$$

Левую часть этого равенства мы можем написать так: $a\ .\ (a - a)$, в результате имеем:

$$a\ .\ (a - a) = (a + a)\ .\ (a - a).$$

Если мы разделим обе части последнего равенства на сомножитель $(a - a)$, то получим

$$a = a + a,$$

следовательно, $a = 2a$

или $\frac{a}{2} = a,$

что и требовалось доказать.

Таким же образом можно доказать:

### II. Все числа равны между собой.

Доказательство: Пусть $a$ и $b$ два любых числа. Мы предполагаем, что они различные числа и что число $a$ больше числа $b$. Обозначим разность чисел $a$ и $b$ через $c$, т.-е.

$$a - b = c$$

или:

$$a = b + c.$$

Умножив обе части этого равенства на $(a - b)$, имеем:

$$a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc.$$

Если член $ac$ правой части этого равенства перенести в левую или, что то же самое, отнять от обоих частей равенства по $ac$, то получим:

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc.$$

Это равенство можно преобразовать так:

$$a \cdot (a - b - c) = b \cdot (a - b - c).$$

В обе части этого равенства входит один и тот же сомножитель $(a - b - c)$; разделив на него, получим:

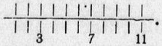
$$a = b,$$

т.-е., два любых числа $a$ и $b$ равны между собой, что и требовалось доказать.

**III.** Читатель вероятно, вопреки вышеприведенному доказательству, все же не верит, что все числа равны между собой. Более всего смущают его, конечно, следствия, вытекающие отсюда: уничтожение различия между „многим“ и „немногим“, между бедностью и богатством, между „большим“ и „меньшим“. Поэтому, чтобы окончательно убедить читателя, приведем *второе доказательство* выше полученного результата.



Пусть $a$ и $b$—два произвольных числа; мы опять предполагаем, что одно из них больше другого. В таком случае всегда существует число, находящееся посередине между числами $a$ и $b$. Напр., если взятые числа—3 и 11, то таким числом будет 7:




Обозначим это „срединное“ число для $a$ и $b$, или, как говорят, средне-арифметическое чисел $a$ и $b$, через $d$; тогда имеем:

$$a + b = 2d$$

(для нашего примера: $3 + 11 = 2 \times 7$).

Из этого равенства следует:

$$b = 2d - a$$
$$2d - b = a.$$

Перемножив последние два равенства, получим:

$$2db - b^2 = 2da - a^2.$$

Если вычтем последнее равенство из равенства

$$d^2 = d^2,$$

то получим: $d^2 - 2db + b^2 = d^2 - 2da + a^2$

или $$(d - b)^2 = (d - a)^2.$$

Если извлечем квадратный корень из обеих частей этого равенства, то получим:

$$d - b = d - a,$$

т.-е. при вычитании из числа $d$ числа $b$ получается такое же число, какое получится при вычитании из того же числа $d$ числа $a$; следовательно, $b = a$, что и требовалось доказать.

Но если читатель все-таки нам и теперь не поверит, то во всяком случае не будет оспаривать верность следующего равенства:

$$3 - 1 = 6 - 4.$$

Помножив обе части его на $(-1)$ получаем равенство, опять не вызывающее сомнений:

$$1-3=4-6$$

(каждая часть этого равенства равна $-2$). Если прибавить к обеим частям последнего по $^9/_4$, то получается:

$$1-3+{}^9/_4=4-6+{}^9/_4$$

или, что то же самое

$$(1-{}^3/_2)^2=(2-{}^3/_2)^2.$$

Если извлечь из обеих частей этого равенства квадратный корень, то получается:

$$1-{}^3/_2=2-{}^3/_2,$$

отсюда, прибавлением к обеим частям по $^3/_2$ получим:

$$1=2.$$

Но, если $1=2$, то прибавив к обеим частям уже этого равенства по 1, имеем:

$$2=3,$$

откуда посредством прибавления к обеим частям по 1:

$$3=4 \text{ и т. д.}$$

Следовательно, $1=2=3=4$....., чем мы доказали, что все целые числа равны между собою.

## IV. Нуль больше любого числа.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть $a$ произвольное положительное число, сколь угодно большое. Понятно, что число $(a-1)$ во всяком случае меньше числа $a$, что записывают, как известно, в форме „неравенства" *):

$$a-1<a.$$

*) Неравенство $x<y$ означает, что число $x$ меньше числа $y$, и наоборот, неравенство $y>x$ означает, что число $y$ больше числа $x$. Для последующего необходимо знание такого рода записи.



Если обе части этого неравенства умножим на $(-a)$, то получим:

$$-a^2+a<-a^2.$$

Прибавив к обеим частям по $a^2$, придем, наконец, к такому неравенству:

$$a<0.$$

Этим мы получили следующее предложение: *Любое положительное, даже сколь угодно большое число меньше нуля,* что мы и хотели доказать.

Следовательно, если $a$ означает капитал миллионера или даже миллиардера $A$, то последнее неравенство показывает, что этот капитал меньше капитала $0$ человека, ничего не имеющего. Если $b$, $c$, $d$, и т. д. обозначают соответственно капиталы миллионеров или миллиардеров $B$, $C$, $D$ и т. д., то на основании последнего неравенства имеем:

$$a<0;\ b<0;\ c<0;\ d<0;......$$

Сложив эти неравенства, получим:

$$a+b+c+d+....<0.$$

Следовательно, человек, ничего не имеющий, богаче всех миллионеров и миллиардеров, вместе взятых. Результат, поистине,—невероятный, но непосредственно вытекающий из данного здесь „математического" доказательства.

## V. Если число $p$ меньше другого $q$, то $n.\ p<q$ при любом четном $n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть число $p$ положительно $(p>0)$ и меньше второго числа $q$, следовательно, $p<q$. Умножив обе части этого неравенства на $p$, получим $p^2<pq$. Вычитая из обеих частей последнего неравенства по $q^2$, будем иметь:

$$p^2-q^2<pq-q^2$$

или

$$(p+q).(p-q)<q.(p-q).$$

Разделив это неравенство на $(p-q)$, получим:

$$p+q<q.$$

Сложим это наравенство с нашим первоначальным $p<q$. Получается, что $2p+q<2q$. Вычтя из обеих частей последнего неравенства по $q$, мы будем иметь, что $2p<q$. Следовательно, при всех обстоятельствах удвоенное $p$ (т.-е. $2p$) меньше $q$. Точно также, как из неравенства $p<q$ получили $2p<q$, из неравенства $2p<q$, легко получить $4p<q$, из последнего $8p<q$ и т. д. Таким образом наше утверждение доказано.

### VI. Четверть больше половины.

Доказательство *): Если читатель не согласен с предыдущими утверждениями, то он во всяком случае согласится с нами, что дважды взятая величина больше самой этой величины. Поэтому

$$2\ log a > log a$$

или

$$log a^2 > log a.$$

Если положить, что $a = {}^1/_2$, то имеем:

$$log\ {}^1/_4 > log\ {}^1/_2.$$

Но, как известно, большему логарифму соответствует и большее число, поэтому

$$^1/_4 > {}^1/_2$$

что и требовалось доказать.

### VII. В математике нет мнимых чисел, а только вещественные.

Доказательство **): Так называемые мнимые числа имеют форму $a.i$, где $a$—вещественное

*) Предполагается, что читатель знаком с теорией логарифмов.

**) Предполагается, что читатель знаком с теорией комплексных чисел.



число, а $i$—мнимая единица $\sqrt{-1}$. Поэтому, чтобы доказать, что в математике все мнимые числа — вещественны, достаточно доказать, что мнимая единица—вещественна. С этой целью умножают обе части равенства

$$\sqrt{-x} = i\sqrt{x}$$

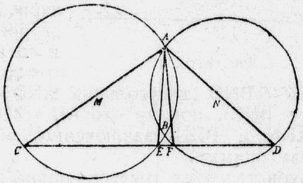
на $\sqrt{-1}$; получается

$$\sqrt{x} = i\sqrt{-x} =$$
$$= i.\ (i.\ \sqrt{x}) =$$
$$= i^2\ \sqrt{x}.$$

Разделив обе части этого равенства на $\sqrt{x}$, получим $i^2 = 1$ следовательно $i = \sqrt{1}$. Таким образом доказано, что $i$ — вещественное число.

### VIII. Существуют треугольники с двумя прямыми углами и одним острым.

Доказательство: На фигуре 60 начерчен треугольник такого рода, именно: $\triangle AEF$. Этот

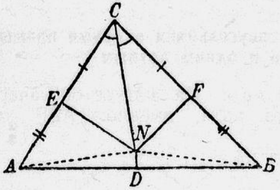



Фиг. 60.

треугольник получен следующим образом. Две окружности M и N пересекаются в двух точках A и B. Из одной точки пересечения, именно A, проведены диаметры AMC и AND. Прямая CD, соединяющая точки C и D, пересекает обе окружности в точках E и F. Соединив A с E и F, получим $\triangle$ AEF. Углы AFD и AEC — прямые, как вписанные углы, опирающиеся соответственно на диаметры ANC и AMC. Поэтому их смежные углы AFE и AEF также прямые. Итак, в $\triangle$ AEF два прямых угла и один острый, что и требовалось доказать.

### IX. Все треугольники равнобедренны.

Доказательство: Пусть проведена в треугольнике ABC (фиг. 61) биссектрисса угла C и из середины D противолежащей ему стороны AB восстановлен перпендикуляр. Биссектрисса и этот перпендикуляр пересекутся в точке N. Если теперь опустить из точки N перпендикуляры NE и NF на стороны AC и BC и соединить N с точками A и B, то:




Фиг. 61.

1) AND ≌ BND (треугольник AND равен треугольнику BNE), потому что AD = BD, ND = ND, а углы ADN и BDN, заключенные между ними, равны, как прямые.

Из равенства этих треугольников следует, что AN = BN.

2) ECN ≌ FCN, потому что угол ECN = углу FCN, CN = CN и углы при E и F прямые.

Из равенства этих треугольников следует, что CE = CF и FN = FN.



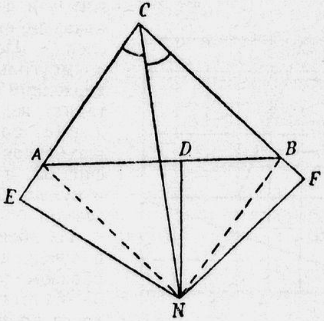
3) AEN ≌ BFN, потому что AN = BN (по 1), EN = FN (по 2) и углы при E и F прямые.

Из равенства этих треугольников следует, что *AE = BF*.

В силу равенства второй пары треугольников, отрезки CE и CF (отмеченные на фиг. 61 *одной* черточкой) между собою равны, в силу же равенства 3-ей пары треугольников, отрезки AE и BF (отмеченные *двумя* черточками), также между собою равны. Отсюда вытекает, что сторона AC равна BC, т.-е. всякий треугольник ABC—равнобедренный.

Точно так же, как мы доказали равенство сторон AC и BC треугольника ABC, можно, понятно, доказать равенство сторон AC и AB, отсюда следует предложение: **все треугольники равносторонни**.

Если точка пересечения N биссектриссы CN и перпендикуляра DN не находится внутри треугольника, но вне его (фиг. 62), то все-таки придем



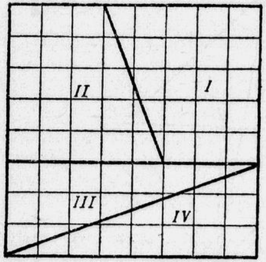

Фиг. 62.

к прежнему выводу. Стоит только в этом случае дословно повторить вышеприведенное доказательство с одним только изменением в конце его, именно, в конце рассматривать AC не как сумму отрезков CE и EA, но как их разность; то же самое относится и к другой стороне CB треугольника. Результат получится прежний: AC = BC, т.-е., что треугольник ABC равнобедренный, и затем нетрудно придти к выводу, что этот треугольник и равносторонний.

## X. 65 = 64 = 63.

Всякий шахматист знает, что шахматная доска состоит из 64 клеток: из восьми рядов по 8 клеток в каждом. Здесь мы ему покажем доску такой же площади, как и его шахматная доска, но с 65 клетками такого же размера, как и клетки его доски.

Доказательство: Разрежем его шахматную доску на 4 части, как указано на фиг. 63. Затем сложим эти части, как показано на фиг. 64 слева. Получится прямоугольник, содержащий 5×13=65 таких же клеток, какие содержит шахматная доска фиг. 63, а это нам и нужно было доказать.

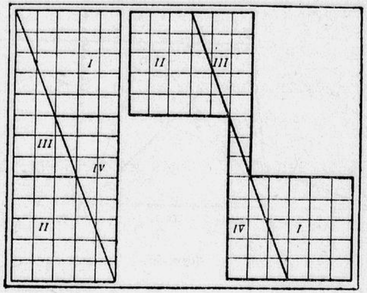



Фиг. 63.

Из обеих частей полученного таким образом равенства 65=64 вычтем по 1, тогда получим, что 64=63; вторая часть



предложения, указанного в заголовке, доказана. Но можно без труда непосредственно доказать, что 64=63. Для этой цели четыре части I, II, III и IV фиг. 63 складывают, как показано на фиг. 64 справа.




Фиг. 64.

Тогда эти 4 части, вместе составлявшие раньше (фиг. 63) 64 клетки, образуют фигуру, содержащую лишь 63 клетки такого же размера, как и клетки фиг. 64.

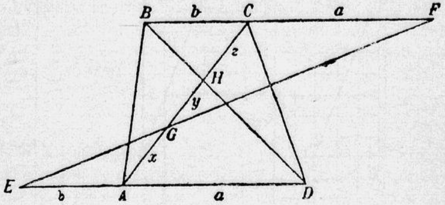
Из равенства чисел 65, 64, 63, естественно вытекает равенство всех чисел, результат для нас не новый, полученный раньше иным путем.

## XI. Сумма параллельных сторон трапеции равна нулю *).

Доказательство: Продолжим обе параллельные стороны трапеции (фиг. 65) $BC = b$ и

*) Заимствовано из книги Литцмана и Трира „Где ошибка“ (имеется русский перевод изд. „Научного Книгоиздательства“).

$AD = a$ в противоположные стороны; причем $BC$ продолжим до точки $F$ так, чтобы $CF = a$, сторону же $AD$ до точки $E$ так, чтобы $AE = b$. Затем соединяем прямой точки $E$ и $F$ и проводим диаго-




Фиг. 65.

нали $BD$ и $AC$ трапеции. Диагональ $AC$ делится пересекающими ее прямыми $BD$ и $EF$ на части, которые, как показано на фигуре, обозначены соответственно буквами $x$, $y$ и $z$. Нетрудно убедиться, что треугольники $BHC$ и $AHD$ подобны; также подобны и треугольники $EGA$ и $CGF$. Из подобия первой пары треугольников имеем:

$$\frac{b}{a} = \frac{z}{x+y},$$

из подобия же второй пары треугольников имеем:

$$\frac{b}{a} = \frac{x}{y+z}.$$

Эти две пропорции могут быть представлены так:

$$\frac{b}{a} = \frac{z}{x+y} = \frac{x}{y+z} \quad . \ . \ . \ . \text{ (равенство I).}$$



Из пропорции $\frac{z}{x+y} = \frac{x}{y+z}$ почленным вычитанием обоих отношений, как известно, получается *):

$$\frac{z}{x+y} = \frac{x}{y+z} = \frac{z-x}{x-z},$$

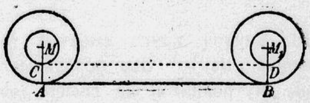
поэтому на основании равенства 1 имеем:

$$\frac{b}{a} = \frac{z-x}{x-z} = -1.$$

Если же $\frac{b}{a} = -1$, то это означает, что $b = -a$ или $b + a = 0$, что и требовалось доказать.

## XII. Все окружности имеют одинаковую длину.

Доказательство: Представим себе два скрепленных друг с другом круга с общим центром (фиг. 66), или, иными словами, круглый диск с начерченным на нем меньшим концентрическим кругом. Пусть этот диск



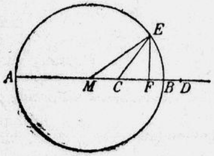

Фиг. 66.

*) Если имеется пропорция $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, то из нее вытекает, как известно, такая: $\frac{m}{p} = \frac{n}{q}$. Из последней вычитанием из обеих частей по 1 получим $\frac{m}{p} - 1 = \frac{n}{q} - 1$ или $\frac{m-p}{p} = \frac{n-q}{q}$ или $\frac{m-p}{n-b} = \frac{p}{q}$ и, следовательно, $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} = \frac{m-p}{n-q}$. Поэтому мы можем сказать, что из пропорции $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ почленным вычитанием членов отношений получаются пропорции $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} = \frac{m-p}{n-q}$. В тексте мы такого же рода преобразование произвели над пропорцией $\frac{z}{x+y} = \frac{x}{y+z}$.

катится в плоскости по прямой линии. Предположим, что диск, сделав один оборот, пройдет расстояние $AB$ вдоль прямой, по которой он катится. Понятно, что отрезок $AB$ равен длине окружности диска. В промежуток времени, в течение которого диск пройдет расстояние $AB$, т.-е. совершит полный оборот, начерченный на нем меньший круг совершит тоже лишь один оборот. Понятно, что отрезок $CD$, по которому меньший круг как бы катился, равен как раз длине его окружности. Но очевидно, что отрезки $AB$ и $CD$ равны между собой ($ABDC$ — прямоугольник). Отсюда, приходим к выводу, что длины окружностей у обоих кругов одинаковы, что и требовалось доказать.

**XIII. Внутри круга имеется только одна точка, именно, центр. Все остальные точки, кажущиеся нам внутренними, на самом деле лежат на окружности.**

Доказательство: Пусть нам кажется, что точка $C$ находится внутри круга (фиг. 67). Проведем диаметр $AMB$, проходящий через эту точку $C$. Теперь построим такую точку $D$, чтобы она с точкою $C$ делила гармонически отрезок $AB$. Затем, из середины $F$ отрезка $CD$ восстановим перпендикуляр; последний пересекает окружность в точке $E$. Наконец, соединим эту



Фиг. 67.



точку с точками $M$ и $C$. — По известному предложению *) имеем:

$$MC \,.\, MD = MA^2 \quad . \; . \; . \text{ (равенство I)}.$$

но так как

$$MC = MF - CF$$

$$\text{и } MD = MF + FD = MF + CF,$$

то равенство 1 можно представить в такой форме:

$$(MF - CF) \,.\, (MF + CF) = MA^2$$

$$\text{или } MF^2 - CF^2 = MA^2 \quad . \; . \; . \text{ (равенство II)}.$$

Но, применяя теорему Пифагора, имеем:

$$MF^2 + FE^2 = ME^2$$

$$\text{и } CF^2 + FE^2 = CE^2$$

$$\text{следовательно, } MF^2 - CF^2 = ME^2 - CE^2$$

$$\text{или } MF^2 - CF^2 = MA^2 - CE^2 \text{ (равенство III)}.$$

Из равенств II и III, в которых левые части одинаковы, следует:

$$MA^2 = MA^2 - CE^2,$$

$$\text{т.-е } CE = 0.$$

Следовательно, точка $C$ совпадает с точкой $E$, т.-е. лежит на окружности, что и требовалось доказать.

---

*) Читатель, которому это предложение неизвестно, может убедиться в верности его следующим образом: Если $A$, $C$, $B$, $D$ суть гармонические точки, это означает, что верна следующая пропорция: $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$, которую можно написать так: $\frac{AM + MC}{AM - MC} = \frac{MD + AM}{MD - AB}$. Затем, путем применения почленного сложения и вычитания (см. примечание на стр. 123), к этой пропорции, получим $\frac{AM}{MC} = \frac{MD}{AM}$ откуда: $AM^2 = MC \,.\, MD$.

## XIV. Ахиллес и черепаха.

Греческому философу Зенону Элейскому приписывают много софизмов, из которых наиболее известен следующий. Быстроногий Ахиллес догоняет медленно движущуюся черепаху, от которой его отделяет известное расстояние. Догонит ли он черепаху? Зенон отвечает: „Нет. — Так как, пока Ахиллес достигнет положения $S$, в котором раньше к началу движения находилась черепаха, то последняя успеет доползти до точки $S_1$; когда же Ахиллес достигнет положения $S_1$, то опять-таки черепаха успеет дойти до точки $S_2$, и т. д.“. Таким образом, каждый раз, когда Ахиллес достигнет точки, которой раньше достигла черепаха, последняя передвинется к этому моменту на некоторое расстояние, и Ахиллес, известный своей скоростью бега, никогда не догонит черепахи *).

## XV. Из теории вероятности.

Кто знаком с простейшими принципами теории вероятности, тот, конечно, понимает, что она дает широкое поле для ошибочных заключений и выводов. В заключение мы приведем один подобный

*) Мы дали этому софизму форму, в какой он исторически сложился. Современный Зенон, для более наглядной иллюстрации основной мысли, вероятно, смог бы облечь его в другую форму. Обычно на софизм Зенона возражают, что Ахиллес будет приближаться к черепахе все ближе и ближе и, наконец, перешагнет через нее. Более наглядно читатель может себе представить этот софизм, если заменит Ахиллеса и черепаху двумя паровозами, движущимися по одному и тому же рельсовому пути в одном и том же направлении. Причем предполагается, что локомотивы отделены друг от друга некоторым расстоянием, и что впереди идущий локомотив имеет значительно меньшую скорость, чем идущий сзади. По софизму Зенона задний локомотив никогда не нагонит переднего.



пример, данный известным путешественником по Африке Франциском Галтоном, всесторонне образованным человеком, изучавшим антропологию, метеорологию, географию, археологию и т. д.

В одной компании заинтересовались следующим вопросом. *Три монеты бросаются несколько раз. Какой процент всех бросаний составляют те случаи, при которых у всех монет выпадет орел или решетка.* Один из присутствующих ($A$) рассуждает так: „В сущности все равно — бросать ли в каждом случае все три монеты одновременно или одну за другой. Поэтому для большей наглядности предположим, что в каждом отдельном случае монеты бросаются одна за другой. Я бросаю первую: выпадет либо орел, либо решетка. Теперь бросаю вторую. Как велика вероятность, что вторая монета упадет той же стороной, что и первая? Понятно, что она равна $^1/_2$. Теперь бросаю третью монету; вероятность того, что она упадет той же стороной, что и первые две монеты, равна половине вероятности выпадения этих двух монет одной и той же стороной, т.-е. половине от половины. Следовательно, вероятность того, что все три монеты выпадут одной и той же стороной равна $^1/_4$, т.-е. возможно, что из всех бросаний 25% придется на тот случай, который нас интересует“. — „Я не согласен“, отвечает второй ($B$): „Ваше предположение, что бросание монет одну за другой равносильно одновременному, неверно и привело вас к ложному заключению. Можно убедиться в неправильности полученного вами результата следующим образом. Я бросаю одновременно все три монеты; понятно, что самое меньшее — две монеты упадут одной и той же стороной. Вероятность того, что и третья монета упадет той же стороной, очевидно, равна $^1/_2$. Следовательно, вероятность интересующего нас случая равна $^{1}/_{2}$, т.-е. из всех бросаний 50% придется на этот случай".

Кто прав, *A* или *B*? Или, может быть, оба неправы?

---

# ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ

## Глава I.

Вопрос 1: *B* (второй) должен прыгнуть сначала с 1 на 2, затем на 13, 24, 35, 46 и т. д. Следовательно, после первого прыжка он должен становиться на места, отделенные друг от друга промежутками в 11.

Вопрос 2: *B* может выиграть, если он первым прыжком достигнет 9, а затем будет становиться на места, отделенные друг от друга промежутком 9, т.-е. на 18, 27, 36 и т. д., пока не достигнет 90.

Вопрос 3: Выиграет *A*, если он сначала станет на 6, затем на 24, 42, 60, 78, 96, 114, 132 и, наконец, на 150.

Вопрос 4: Выиграет *B*, если он первым прыжком станет на 13, затем будет становиться на места, отделенные промежутками в 13 (26, 39, 182).

Вопрос 5: Выиграет, конечно, тот, кто первым достигнет 98 или 99, так как его противник — при минимальном прыжке в 2 фута — ближайшим прыжком либо достигнет конца пути, либо перейдет его. Следовательно, *A* мог бы выиграть, достигнув 98, если бы он мог вначале попасть на 10 и затем становиться на места, отделенные промежутками в 11. Но он одним прыжком не может достигнуть 10, так как максимальный прыжок не может превосходить 9. Точно также *A* ни в коем случае не может достигнуть 99, так как для этого он должен раньше



достигнуть 11. Как бы *A* ни начал, *B* может первым прыжком достигнуть 11, затем передвигаться каждый раз на 11, пока не достигнет 99; *A* принужден будет перепрыгнуть через конец пути, и, следовательно, в итоге проиграет. Для *B*, кроме этого, всегда возможного способа выиграть, существует и другой, но не всегда достижимый. Если *B* первым прыжком попадет на 10, что не всегда возможно, то он может последовательными передвижениями на 11 достигнуть 98 и тем самым заставить *A* или достигнуть конца пути, или его перейти. Второй способ выигрыша невозможен тогда и только тогда, когда *A* первым прыжком станет на 9. Первый же способ, как сказано, возможен при всех обстоятельствах, как бы *A* ни начал.

## Глава II.

Вопрос 6: Общее число всех инверсий равно 23, поэтому задача неразрешима.

## Глава III.

Вопрос 7: Задача симметрична задаче IV параграфа третьего, из которой легко получается схема решения.

Вопрос 8: Задача сопряжена с задачей XIV параграфа третьего.

Вопрос 9: Очевидно, что задача аналогична задаче X параграфа третьего. В самом деле, путем поворота на $90^{0}$ по направлению движения часовой стрелки, комбинацию 46, 13 (46 — начальное, 13 — конечное отверстие) можно свести к комбинации 64, 37. Отсюда можно путем отражения относительно средней вертикали перейти к 24, 57, затем перестановкой начального и конечного отверстий: 57, 24 (задача X).—Таким образом, заданная задача симметрична сопряженной с задачей X параграфа третьего.

## Глава IV.

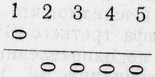
Вопрос 10: Нет; так как мнимое преимущество такого набора разновесок достигается ценою невозможности произвести взвешивание в 32 г и 97 г (32 плюс 65).

Вопрос 11: Набором разновесок, данным в задаче можно взвесить от 1 г до 610 г включительно. 11 его гирь можно заменить следующими десятью: 1 г, 2 г, 4 г, 8 г, 16 г, 32 г, 64 г, 128 г, 256 г, 512 г, которыми можно взвешивать до 1023 граммов.

Вопрос 12: Понадобятся всего 127 перемещений; причем из них на пластинку 1 придется 64, на пластинку же 5—только 4. Первое перемещение будет: „1 с А на С“.

## Глава V.

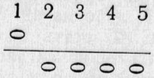
Вопрос 13: Начальное положение колец, при котором все они находятся на челноке, понятно, не является наиболее неблагоприятным для отделения колец от челнока. Наиболее неблагоприятным случаем для 5 колец является следующее начальное положение:




так как сперва придется последние четыре кольца поднять на челнок. Для этого понадобятся столько же операций, сколько их необходимо для отделения колец от челнока, когда первое находится внизу,



а остальные наверху, т.-е. семь операций. К последним, конечно, надо присоединить 16 операций, необходимых для отделения колец при нормальном первоначальном их расположении. Таким образом начальное положение




требует 23 операций.

## Глава VI.

Вопрос 14: „Основными числами“ для этой задачи являются: 1, 2, 4, 8, 16

$$7 = 4 + 2 + 1$$
$$25 = 16 + 8 + 1;$$

поэтому третье число должно быть равно $16 + 8 + 4 + 2 = 30$. Следовательно, искомая „особенная“ позиция: 7, 25, 30.

Вопрос 15: Выиграет второй, так как первоначальная позиция есть „особенная“. В самом деле

$$3 = 2 + 1$$
$$17 = 16 + 1$$
$$18 = 16 + 2.$$

Вопрос 16: Эта задача, очевидно, принадлежит к задачам главы I. Согласно изложенной в ней теории, при правильной игре должен выиграть второй: он должен первым ходом убрать из кучки столько камешков, чтобы последние вместе с камешками, убранными первым игроком, составляли число 5; при втором ходе—10, при третьем—15, при четвертом—20, при пятом—25.

## Глава VII.

Вопрос 17: Согласно данному нами правилу, продолжение игры от клетки 37 до клетки 46 возможно только, как указано на фиг. 68. С клетки 46, согласно тому же правилу, можно стать конем либо на клетку 47, либо на 49. Если, как мы это сделали, с клетки 46 стать на клетку 47, то в дальнейшем (опять-таки согласно правилу) до клетки 51 мы можем продолжить игру только так, как указано на фиг. 68. С клетки 51 коня можно поставить с одинаковым правом, как на 52, так и на 54. Если мы выберем клетку 52, то следующие ходы без сомнения должны быть до клетки 59 такими, как указано на фиг. 68. С клетки 59 можно перейти либо на 60, либо на 64. Выбрав 60, мы должны будем закончить задачу опять-таки, как

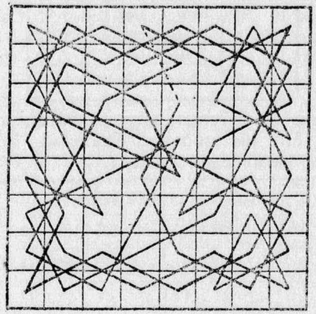
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 56 | 17 | 34 | 1 | 54 | 19 | 50 | 3 |
| 35 | 12 | 55 | 18 | 33 | 2 | 53 | 20 |
| 16 | 57 | 32 | 13 | 64 | 51 | 4 | 49 |
| 11 | 36 | 15 | 58 | 27 | 48 | 21 | 52 |
| 38 | 31 | 26 | 63 | 14 | 59 | 46 | 5 |
| 25 | 10 | 37 | 28 | 47 | 22 | 43 | 60 |
| 30 | 39 | 8 | 23 | 62 | 41 | 6 | 45 |
| 9 | 24 | 29 | 40 | 7 | 44 | 61 | 42 |

Фиг. 68.

указано на фиг. 68. Полученный нами „ход коня“, хотя он составлен приблизительно на три пятых по фиг. 34, не имеет уже такой красивой формы,



как фиг. 34, что видно из его диаграммы (фиг. 69). Вообще, ходы образованные по нашему правилу, никогда не отличаются красотой. Но наш „ход коня“ на этот раз — замкнутый (конечные клетки соединены пунктирной линией), в то время, как ход коня фиг. 34 — незамкнутый.



Фиг. 69.

## Глава VIII.

Вопрос 18: Выписав все числа от 1 до 81 в два ряда один под другим, можно сразу же получить, что сумма чисел обоих рядов равна $82 \times 81$. Следовательно, сумма чисел одного ряда равна $\frac{82 \times 81}{2}$. Поэтому сумма чисел каждого из 9 рядов магического квадрата равна: $\frac{82 \times 81}{2 \times 9} = 369$.

Вопрос 19: Фиг. 70.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 29 | 12 | 37 | 20 | 45 | 28 |
| 35 | 11 | 36 | 19 | 44 | 27 | 3 |
| 10 | 42 | 18 | 43 | 26 | 2 | 34 |
| 41 | 17 | 49 | 25 | 1 | 33 | 9 |
| 16 | 48 | 24 | 7 | 32 | 8 | 40 |
| 47 | 23 | 6 | 31 | 14 | 39 | 15 |
| 22 | 5 | 30 | 13 | 38 | 21 | 46 |

Фиг. 70.

Вопрос 20: Путем замены чисел квадратов „b“ (фиг. 50) им противолежащими, получается следующий магический квадрат:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 141 | 140 | 139 | 138 | 137 | 136 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 129 | 128 | 127 | 126 | 125 | 124 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 117 | 116 | 115 | 114 | 113 | 112 | 34 | 35 | 36 |
| 108 | 107 | 106 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 99 | 98 | 97 |
| 96 | 95 | 94 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 87 | 86 | 85 |
| 84 | 83 | 82 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 75 | 74 | 73 |
| 72 | 71 | 70 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 | 63 | 62 | 61 |
| 60 | 59 | 58 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 51 | 50 | 49 |
| 48 | 47 | 46 | 100 | 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 39 | 38 | 37 |
| 109 | 110 | 111 | 33 | 32 | 31 | 30 | 29 | 28 | 118 | 119 | 120 |
| 121 | 122 | 123 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 130 | 131 | 132 |
| 133 | 134 | 135 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 142 | 143 | 144 |

Фиг. 71.

Вопрос 21: на 470.



Глава IX.

## Раскрытие софизмов.

I. Включительно до равенства

$$a\,.\,(a-a)=(a+a)\,.\,(a-a)$$

все наши рассуждения безошибочны, безупречны. Это равенство выражает, что два произведения, из которых каждое содержит по два сомножителя, равны между собой; причем в каждое произведение входит один и тот же сомножитель, именно $(a-a)$. Следовательно, мы имеем равенство такой формы:

$$x\,.\,z=y\,.\,z.$$

В общем случае из такого равенства следует, что $x=y$, так как, если два произведения, содержащих по два сомножителя, равны между собой и в каждое из них входит по одинаковому сомножителю, то и вторые сомножители должны быть также равны между собой: так, $3\,.\,7$ может быть равно только $3\,.\,7$, но отнюдь не $5\,.\,7$. Если, напр., имеется равенство $x\,.\,7=3\,.\,7$, то из него непременно следует, что $x=3$. Исключение составляет тот случай, когда одинаковый сомножитель, входящий в оба произведения, равен нулю: $3\,.\,0=5\,.\,0$. Следовательно, равенство

$$x\,.\,z=y\,.\,z$$

удовлетворяется, когда $z=0$, при каких угодно значениях $x$ и $y$, как равных так и неравных между собой. Как из равенства $3.0=5.0$ нельзя заключить, что $3=5$, так из равенства $x\,.\,z=y\,.\,z$, когда $z=0$, нельзя придти к выводу, что $x=y$. Но мы как раз последнее и сделали при доказательстве софизма. В самом деле, в оба произведения равенства

$$a\,.\,(a-a)=(a+a)\,.\,(a-a)$$

входит сомножитель $(a-a)$, равный нулю, между тем мы в тексте пришли к ложному выводу, что и вторые сомножители равны между собой, именно: $a=a+a$. Короче выражаясь, *мы разделили обе части равенства на нуль*, операция, как теперь видно, невозможная.

II. Здесь мы также, как в I, делили обе части на нуль, именно, на $a-b-c$; последнее же выражение потому равно нулю, что по предположению, сделанному вначале

$$a-b=c.$$

Ошибка, происходящая вследствие деления на нуль, неоднократно применяется различными авторами при составлении арифметических софизмов.

Мы приводим здесь выписку из давно позабытой газеты, издававшейся более 50-ти лет тому назад, под названием „Математическая газета за кружкой пива". Автор забавно использовал для своей статьи библейское предание об изгнании Адама и Евы из рая:

1. И сказал бог Адаму: „Смотри, я отдаю в руки твои весь математический рай.

2. „На всякие числа в раю ты будешь делить.

3. „А на нуль—не дели на него: ибо нуль—есть творение владыки мрака"

4. Змей был хитрее всех зверей полевых. И сказал он жене: „Почему не делите вы на все числа рая?"

5. И сказала жена змею: „Муж мой делит на все числа, кроме нуля, ибо нуль есть творение владыки мрака".

6. И сказал змей жене: „Нет, нуль не творение мрака, но если будете делить на него, то откроются глаза ваши и узнаете добро и зло".

7. И увидела жена, что на нуль хорошо делить, что нуль приятен для глаз, ибо дает знание. И сказала мужу своему: „Дели же. Разве не видишь, что равенства и уравнения этим упрощаются".



8. И Адам, скрепя сердце, разделил, и открылись глаза его и одновременно наполнились слезами.

9. Но бог сказал Адаму: „Ты нарушил мой запрет.

10. „Поэтому я изгоняю тебя из математического рая.

11. „В поте своего лица будешь ты решать уравнения и выискивать доказательства; ты не будешь верить никакому утверждению, пока оно не доказано".

III. До равенства $(d-b)^2=(d-a)^2$ включительно наши рассуждения верны. Из равенства двух выражений, однако, не следует, что и квадратный корень из одного выражения равен квадратному корню из другого, так как квадратный корень из числа, как известно, имеет два значения, отличающиеся друг от друга знаками; если, напр., $A$ и $B$ друг другу равны, то квадратный корень из $A$ не равен прямо квадратному корню из $B$, но равен одному из двух значений последнего. Из равенства $(d-b)^2=(d-a)^2$ мы не имеем права, как мы это сделали, прийти непосредственно к выводу, что $d-b=d-a$, но мы можем лишь сказать, что $d-b$ равно

$$\text{либо } +(d-a)$$
$$\text{либо } -(d-a).$$

Какое же из этих двух значений взять для $d-b$, нетрудно узнать. Если из двух чисел $a$ и $b$ большее число есть $b$, то $d$, как среднее арифметическое этих чисел, меньше $b$, но больше $a$. Поэтому разность $d-b$ отрицательна, $a-d-a$ положительна. Следовательно, мы не можем принять, как мы это сделали в тексте, что

$$d-b=+(d-a),$$

а мы должны непременно принять, что

$$d - b = -(d - a).$$

Последнее равенство, отнюдь, не приводит к ложному выводу; из него следует, что

$$d - b = -d + a$$

и дальше $$2d = a + b,$$

т.-е. мы приходим к тому же равенству, от которого мы исходили в рассуждениях софизма III (стр. 112).

IV. Неравенство $a - 1 < a$, от которого мы исходили, конечно, неоспоримо. Но что неверно и что привело нас к ложному выводу, — это умножение обеих частей неравенства на отрицательное число $(-a)$. Можно умножать обе части *равенства* на одно и то же отрицательное число, но нельзя умножать на такое же число *неравенство*, как показывает следующий пример. Если мы умножим обе части неравенства $1 < 2$ на $(-2)$, то получим, что $-2 < -4$, неравенство, очевидно, неверное, так как $(-2)$ не меньше, а больше $(-4)$. В самом деле, если $A$ должен 2 рубля, то он обладает большим капиталом, чем лицо $B$, имеющее долг в 4 рубля (если читателю это трудно себе представить, то пусть он предположит, что эти лица заработали по 5 рублей и затем уплатили свой долг; тогда у $A$ останется денег (3) больше, чем у $B$ (1).

На самом же деле, когда мы умножаем обе части неравенства $1 < 2$ на число $(-2)$, то мы должны одновременно знак $<$ заменить знаком, ему противоположным, т.-е. знаком $>$. Таким образом получим, что $-2 > -4$, но не $-2 < -4$. Точно также, когда неравенство $a - 1 < a$ умножается на $(-a)$, то получим:

$$-a^2 + a > -a^2,$$

$$\text{но не } -a^2 + a < -a^2.$$



Но из неравенства $-a^2 + a > -a^2$ вытекает, что $a > 0$ — результат, отнюдь, не неожиданный, так как положительное число больше нуля.

V. В IV мы пришли к ложному выводу от того, что по умножении обеих частей неравенства на отрицательное число не переменили знака неравенства на обратный. Здесь мы имеем почти тоже самое: делим обе части неравенства на отрицательное число $p - q$ ($p < q$, значит $p - q$ отрицательно). Деление неравенства на отрицательное число допустимо в том случае, когда одновременно с делением знак неравенства заменен обратным ему знаком. Тогда получим не $p + d < d$, но $p + q > q$; неравенство, само собой очевидное.

VI. В этом софизме мы исходили из того положения, что произведение некоторого числа на 2 больше самого числа. Но это положение верно лишь для *положительных чисел*. Если $A$ имеет капитал в два раза больший капитала $B$, то, естественно, что капитал $A$ больше капитала $B$; но, если эти лица имеют только одни долги и долг $A$ в 2 раза больше долга $B$, то „капитал" $A$ меньше „капитала" $B$ (см. стр. 138). Но $\log a$ при $a = 1/2$ не положительное, а отрицательное число, поэтому неравенство

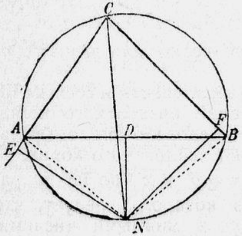
$$2 \log a > \log a$$

при $a = 1/2$ — неверное; оно верно для всякого $a$, бо́льшего 1.

VII. Этот софизм основывается, как и софизм III, на том, что из двух значений квадратного корня выбирается не то, какое следовало бы выбрать. Если верно выбирать знаки квадратного корня, то придем к равенству: $-\sqrt{x} = i^2 \sqrt{x}$ (но не к равенству: $\sqrt{x} = i^2 \sqrt{x}$), из которого следует, что $i^2 = -1$. Вообще, оперируя с мнимыми числами, можно, как преднамеренно, так и вопреки желанию, придти к ошибочным заключениям. Например, из равенства $i^4 = 1$, в справедливости которого никто не сомневается, можно путем извлечения квадратного корня получить неверное равенство $i^2 = 1$; на самом же деле из двух значений квадратного корня из единицы ($\pm 1$) следует взять в данном случае не $+\sqrt{1}$, но $-\sqrt{1} = -1$, так что в результате получим : $i^2 = -1$.

VIII. Читателю нетрудно догадаться, что чертеж фиг. 60 умышленно неправильно начерчен, благодаря чему мы и пришли к ложному выводу. В самом деле, представим себе, что точка B соединена с точками C и D; тогда углы CBA и ABD, как углы, опирающиеся на диаметр, — прямые. Кроме того, они имеют общую вершину B и общую сторону *B*A, поэтому две их другие стороны составляют одну прямую CBD. Следовательно, прямая, соединяющая точки C и D, непременно должна проходить через B, точку пересечения двух окружностей.

IX. Этот софизм основан на неправильно начерченных фиг. 61 и фиг. 62. Прежде всего фиг. 61: биссектрисса какого-либо угла треугольника и перпендикуляр, восстановленный из середины противоположной стороны его, пересекаются *не внутри*, как на фигуре, но *вне* треугольника. В этом легко убедиться, если опишем около треугольника круг (фиг. 72). В самом деле, биссектрисса угла C, продолженная до пересечения



Фиг. 72.



с окружностью круга, должна в точке пересечения N делить дугу ANB пополам, так как равные вписанные углы (угол ACN = углу BCN) опираются на равные дуги; значит, дуга AN равна дуге BN. С другой стороны, по известному предложению, перпендикуляр, восставленный из середины хорды AB, делит дугу ANB; стягиваемую этой хордой, также пополам, иными словами этот перпендикуляр проходит через точку N. Таким образом и биссектрисса, и перпендикуляр проходят через точку N. Но, так как, вообще, две прямые линии пересекаются только в одной точке, то точка N и есть та единственная точка, в которой пересекаются биссектрисса угла C и перпендикуляр, восставленный из середины стороны AB. Таким образом доказано, что биссектрисса и перпендикуляр фиг. 61 пересекаются не внутри, но вне треугольника.

В таком случае остается рассмотреть фиг. 62, в которой биссектрисса и перпендикуляр пересекаются вне треугольника. Только что было доказано, что четыреугольник ACBN—вписан в окружность, проходящую через вершины треугольника ABC (фиг. 72), поэтому каждая его пара противоположных углов в сумме равна $2d$ (двум прямым углам); следовательно, уг. CAN + уг. CBM = $2d$. Исключая тот случай, когда ABC действительно равнобедренный и когда, следовательно, каждый из углов CAN и CBN прямой (в этом случае CN диаметр), мы должны притти к выводу, что один из этих углов—острый, а другой—тупой. Поэтому они не могут быть, как на фиг. 62, одновременно внешними углами прямоугольных треугольников (△NAE и △NBF). Только один из этих углов, именно, тупой (на фиг. 72 — CAN) является внешним углом прямоугольного треугольника (△NAE), другой же острый (на фиг. 72 — CBN), — внутренним углом соответствующего прямоугольного треугольника (NBF). Следовательно, основание одного из перпендикуляров NF и NE (именно, NF) должно находиться на соответствующей стороне (BC), а основание другого (NE)—на продолжении соответствующей ему стороны (AC).

Если применить для чертежа фиг. 72 те же рассуждения, какие были проведены для чертежей фиг. 61 и фиг. 62, то и теперь, как прежде для неправильных чертежей, получим

$$CE = CF$$

$$\text{и } AE = BF,$$

но разница будет заключаться в том, что сторона CA равна разности отрезков CA и AE, а другая сторона CB равна, напротив, сумме отрезков CF и FB. Но теперь мы имеем следующее равенство:

$$CF + BF = CE + AE,$$

из которого отнюдь не вытекает, что CB = CA, а что

$$CB = CA + 2\ AE$$

Последнее равенство показывает, что обе стороны CB и CA треугольника неравны между собой и что большая сторона, в данном случае CB, больше меньшей стороны CA на удвоенный отрезок AE.

X. Ошибка здесь заключается в том, что при прикладывании друг к другу кусков I и IV фиг. 63, как указано на фиг. 64, получается линия ABC (фиг. 73), но не прямая, а ломаная, имеющая изгиб у точки B.

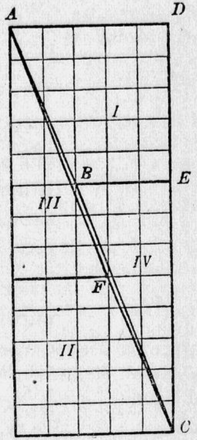
В самом деле, если бы линия ABC была прямая, то должна была иметь место пропорция:

$$AD : BE = DC : EC$$

$$\text{или } 5 : 3 = 13 : 8,$$

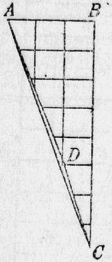


которая, очевидна, не верна, так как произведение крайних ее членов (40) не равно произведению средних (39). То же можно сказать о кусках: II и III. Следовательно, фиг. 64 слева начерчена преднамеренно неправильно. Если правильно сложить куски I, II, III, IV, то получится, фигура (см. рис. 73), внутри которой будет отверстие, имеющее форму весьма узкого параллелограмма. Площадь последнего как раз равна площади одного из квадратиков фиг. 63. Площадь этого параллелограмма и есть площадь той 65-й клетки, которую мы на нашем неправильном чертеже (фиг. 64) незаметно для читателя присоединили к 64 клеткам фиг. 63, как бы скрыли, что куски I и IV отделяются от кусков III и IV пустым местом.



Фиг. 73.

Так же обстоит дело и с фиг. 64 справа. Длинная косая линия на ней при правильном чертеже образует в двух местах изгибы. Часть, обозначенная на фиг. 64 числом III, при правильном построении имела бы вид ABCD фиг. 74, и, следовательно, линия ADC не прямая, а ломаная. Если бы ADC была прямой (а не ломаной), то из фиг. 74 можно было бы получить неверную пропорцию: 3 : 2 = 8 : 5. Прямая, соединяющая точки A и C, проходит вне четыреугольника ADCB, и не последний, а треугольник ACB равновелик куску III фиг. 63. Поэтому, когда в фиг. 64 слева мы треугольник ABC фактически заменили четыреугольником ABCD, то этим мы как бы отрезали от куска III фиг. 64 треугольник ADC. При переходе от фиг. 63 к фиг. 64, эта утайка треугольника производится дважды: сумма площадей этих двух треугольников как раз равна площади одной клетки фиг. 63.




Фиг. 74.

XI. Этот софизм вытекает из того, что мы принимаем $\frac{z-x}{1-x-z}$ равным 1 при любых значениях $x$ и $z$. Вообще, $\frac{z-x}{x-z} = -\frac{x-z}{x-z} = -1$ во всех тех случаях, когда разность $(x-z)$ отлична от нуля. Но, когда $x-z=0$, то и $z-x=0$, и наше выражение $\frac{z-x}{x-z}$ в этом случае оказывается неопределенностью вида 0 — 0. С этим случаем мы здесь как раз и имеем дело. Из пропорции $\frac{z}{x+y} = \frac{x}{y+x}$ получаем $(y+z) = x.\ (x+y)$, или $yz+z^2=x^2+xy$, или $x^2-z^2+xy-yz=0$, или $(x+z)\ (x+z)+y(x-z)=0$, или $(x-z)-(x+y+z)=0$. Это равенство требует, чтобы произведение двух сомножителей $(x-z)$ и $(x+y+z)$ было бы равно нулю. Но это возможно лишь тогда, когда один из сомножителей равен нулю. Но $x+y+z$ равно отрезку AC, поэтому необходимо, чтобы $x+z$ равнялось нулю.

XII. Этот софизм основывается на том, что на самом деле только больший круг, а не меньший, катится по прямой. Если бы меньший круг катился по прямой, то он совершил бы полный



оборот значительно раньше, чем он докатился бы до точки $D$ *).

XIII. Так как A, C, B, D суть четыре гармонических точки, то $\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AC}$. Но $AD > AC$, поэтому и $BD > BC$. Точка F есть середина отрезка Д; следовательно, точка F должна находиться вправо от B, т.-е. точка F лежит вне окружности. И только неправильный чертеж (фиг. 67) мог привести нас к этому софизму.

XIV. Предположим ради удобства, что Ахиллес и черепаха двигаются по прямой линии. Причем пусть Ахиллес двигается со скоростью в 100 метров в минуту, а черепаха со скоростью, составляющею $^1/_{10}$ скорости Ахиллеса, т.-е. со скоростью в 10 метров в минуту. Пусть первоначальное расстояние между Ахиллесом и черепахой равно 100 м. Когда Ахиллес по истечении минуты достигнет первоначального положения $S$ черепахи, последняя за этот промежуток времени пройдет расстояние в 10 метров, до точки $S_1$, вследствие чего Ахиллесу понадобится еще $^1/_{10}$ минуты, чтобы оказаться в точке $S_1$. Но в течении этой $^1/_{10}$ минуты черепаха продвинется на 1 метр до точки $S_2$, поэтому Ахиллесу теперь понадобится $^1/_{100}$ минуты, чтобы достичь $S_2$. За это же время черепаха пройдет 1 дециметр до $S_3$. Ахиллесу понадобится $^1/_{1000}$ минуты, чтобы достичь $S_3$ и т. д. Итак, согласно рассуждениям Зенона, составится промежуток времени, равный 1 минуте $+ ^1/_{10}$ минуты $+ ^1/_{100}$ минуты $+ ^1/_{1000}$ минуты $+ ^1/_{10000}$ минуты $+ \ldots$, в пределах которого Ахиллес действительно не догонит черепахи. Но как велик этот промежуток времени? Приведенный

*) Кривая, описываемая точкой большой окружности при нашем движении, называется „обыкновенной циклоидой“. Кривая, описываемая точкой меньшей окружности, называется „укороченной циклоидой“.

только что ряд может быть представлен так: $1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + \ldots\ldots\ldots$ минут или $1{,}1111\ldots$ минут или, по известному предложению о периодических десятичных дробях, $1^1/_9$ минуты, Итак, промежуток времени, на который простираются рассуждения Зенона, охватывает $1^1/_9$ минуты. В пределах этого промежутка времени Ахиллес действительно не догонит черепахи, хотя расстояние между ними будет становиться все меньше и меньше и к концу этого промежутка оно станет столь малым, что окажется меньше любой сколь угодно малой длины. Последнее происходит оттого, что слагаемые ряда $1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \ldots$, выражающего промежуток времени, по мере удаления от начала, все уменьшаются и уменьшаются. Но расстояние, меньшее сколь угодно малой длины, очевидно, равно нулю, т.-е., по истечении $1^1/_9$ минуты, Ахиллес догонит черепаху и затем при дальнейшем их движении в ближайший же момент он ее опередит.

XV. Рассуждения B неверны; напротив рассуждения A верны. При одном бросании трех монет, одинаково возможен один из следующих 8 случаев (*0*—обозначает орел, *p*—решетку):

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) *000* | 3) *0p0* | 5) *p00* | 7) *pp0* |
| 2) *00p* | 4) *0pp* | 6) *p0p* | 8) *ppp* |

Следовательно, из 8 равновозможных случаев, лишь два (первый и последний) благоприятствуют выпадению монет с одной и той же стороной, поэтому вероятность этого события равна $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Рассуждения лица B основывались на том, что благоприятных случаев для нашего события столько же, сколько и неблагоприятных. Но он упустил из вида следующее обстоятельство: если, напр., на двух монетах при бросании оказалось 0, на третьей же *p*, то эта возможность представляется не один раз, а три, именно во 2, 3 и 5 случаях нашей таблички, так как *p* может оказаться либо на третьей монете, либо на второй, либо на первой. То же самое относится и к комбинации, при которой на двух монетах выпадает *p*, на третьей—*0* (4, 6 и 7 случаи). В противоположность этому, благоприятные случаи *0 0 0* и *p p p* возможны лишь по одному разу. Следовательно, опять-таки неблагоприятных случаев оказывается в три раза более, чем благоприятных.

Гальтон попытался проверить полученный нами результат на опыте. Для этой цели он воспользовался тремя игральными костями, предположив, что выпадение четного числа равносильно выпадению орла, а нечетного—решетки. Он бросал эти кости 120 раз; причем оказалось, что кости показывали одновременно четные или одновременно нечетные числа в 28 случаях. По теории таких случаев должно было быть 30.

# ОГЛАВЛЕНИЕ.

18 -

8 -


**СКЛАД ИЗДАНИЯ:**

В ЛЕНИНГРАДЕ: Книгоиздательство „П Е Т Р О Г Р А Д“, Просп. Володарского, 51. телеф. 5-61-46.

В МОСКВЕ: Петровка, 7, книжный магазин „МАЯК“,